

# 図余りと図足らずを許した正三角形を連ねた螺旋図 (Gibonacci数列と関連数列)

## Spirals based on Equilateral Triangles about Various Related Padovan and Weighted Gibonacci Sequences

大阪工業大学 中西真悟

2024年8月23日 東京理科大学開催 フィボナッチ協会研究集会資料 (持ち帰り質疑回答追記版)

**Abstract:** This document presents the visualization for single, double, and triple equilateral triangle spirals using the related sequences and ratios. Single spirals based on plastic ratio or the related sequences such as Padovan sequence and Perrin sequence are displayed clearly by flexibly changing the initial constants if we admit small amount of reminder or short of the sequences. In the same way, we can show double spirals using equilateral triangles such as Fibonacci sequence, Lucas sequence, k-Pell sequence, and k-Pell-Lucas sequences and related metallic ratios. We call those sequences weighted Gibonacci sequences based on primary metallic ratios in this document. The double spirals based on this thinking about primary metallic ratios and the related sequences are illustrated visually. About showing triple spirals using equilateral triangles, we would like to consider the ratio 2 as the second secondary metallic ratios. We should use the sequence of powers of 2 as the sequence based on Jacobsthal sequence with changing initial constants by applying this concept. Moreover, we can investigate the characterizations about Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas sequences to create the spirals if we consider some geometric shorts of spirals about the characterizations.

**Keywords:** Plane geometry, Metallic ratios, Plastic ratio, Fibonacci sequence, Lucas sequence, k-Pell sequence, k-Pell-Lucas sequence, Jacobsthal sequence, Jacobsthal-Lucas sequence, Padovan sequence, Perrin sequence

## 1. 結論

標題の正三角形を用いた螺旋図をイメージいただきたい。正三角形を活用した螺旋であるがゆえに、正三角形の3辺の活用を考えると、シングル、ダブル、トリプル正三角形螺旋を描ける可能性があることは想像がつくかと思われる。まず、シングル正三角形螺旋はプラスチック数<sup>[1]</sup>、もしくはプラスチック比<sup>[2]</sup>と呼ばれる比を基準に描く螺旋図であることは周知である。また、この性質と所縁のあるパドヴァン数列<sup>[3,4,7]</sup>やペラン数列<sup>[5,6]</sup>による正三角形を連ねた螺旋図<sup>[4,6,7-11]</sup>もGoogleで検索したら表示されるように同様に認知されている。中でも、パドヴァン数列で描く正三角形による螺旋図は正三角形が旨く埋め込まれて図あまりや図足らずがなく正三角形を連ねた完全な螺旋図を描けるため、正三角形の螺旋図の代表格として例証も盛んであるようだ<sup>[7-11]</sup>。

一方で、ペラン数列は最初の3項で凹凸が確認できていて、図あまりの状態が始まるが、その後は正常に正三角形を連ねた螺旋図を作画できる。このように、パドヴァン数列やペラン数列での正三角形を連ねた螺旋図は確認できるのだが、類似する数列では例証は可能なのかを調査しても把握できなかった。このため、本研究の題目にもある通り、若干の図余りと図足らずを認めることとし<sup>[10]</sup>、プラスチック比の性質に関連する数列を活かしながら図あまりや図足らずを許した正三角形を連ねた螺旋図が描けるか試したところ可能であると確認できた。こ

のため、先に2024年2月開催の図学会関西支部学術講演会においてこのことを紹介している<sup>[10]</sup>。そこで、今回はフィボナッチ数列に所縁のある研究者が集う会合に初参加したので、このことを簡潔に紹介すると同時に、残るダブル正三角形螺旋図と、トリプル正三角形螺旋図にも焦点を当てて研究を進めた成果を紹介したい。

ところで、ダブル正三角形螺旋は黄金比が基準で描けることはあまり知られていないようである<sup>[12-15]</sup>。同時に、フィボナッチ数列でも作画が可能なのも著者は知り得なかった。日本語で検索して見つからなかった両者を見つけた時には興奮したが、フィボナッチ数列の古郷でもあるイタリアを検索地に設定して、Googleで英語による検索を行うと、Fibonacci Roseという名称でYouTubeでは紹介されており、アクセス数も多いことがわかった<sup>[14]</sup>。このため、かなり古くから知られていたか、論文検索を行って見つけたSharpの作品<sup>[15]</sup>が黄金比もしくはフィボナッチ数列による最初のダブル正三角形螺旋であるため、YouTubeのアクセス数が多いことも納得でき、西洋諸国では認知されていることがわかった。

一方で、わが国では日本語や英語で検索をかけても、文献を調査しても、著者が研究HPに関連図案と一緒にこれらを公開する前は、フィボナッチ数列と正三角形を用いた螺旋図は見つからなかった。しかし、小生の研究HPに本日の研究成果画像の一部を公開したところ、Googleに好意的に画像として既に認識されたようであ

る。

そこで、本稿ではパドヴァン数列とペラン数列と同様に図余りと図足らずを考慮して、フィボナッチ数列の正三角形による螺旋図の発展形として、リュカ数列、ムラツ数列<sup>[16,17]</sup>を含むGibonacci数列<sup>[18,19]</sup>でも螺旋図の作画は適用可能であることを正式に今回は紹介している。さらに、二項の和に重みを考慮したペル数列<sup>[20]</sup>、ペル・リュカ数列<sup>[20]</sup>のみならず、 $k$ -ペル数列<sup>[21]</sup>や、 $k$ -ペル・リュカ数列<sup>[21]</sup>をも想定した時に同様に描けることも加えて紹介する。したがって、同じ考え方を適用すると、黄金比、白銀比、青銅比を基準<sup>[22]</sup>とするプライマリーの貴金属比<sup>[23]</sup>の活用によるダブル正三角形螺旋図の作画も可能であることも報告する。

続いて、トリプル正三角形螺旋は正三角形の1辺の長さが2のべき乗で表わせるので、セカンダリーの第2貴金属比<sup>[23]</sup>とも相性が良く、本研究では数列を用いた正三角形螺旋の作画を狙っているため、重み付けがあるヤコブスタール数列<sup>[24-26]</sup>の初項からの設定値の修正を考慮した数列として紹介したい。また、ヤコブスタール数列とヤコブスタール・リュカ数列<sup>[24-26]</sup>を活用するとダブル正三角形螺旋図を描けるが中途半端となることと、むしろ、トリプル正三角形螺旋図に適していることを図足らずの幾何学的性質を積極的に活用しながら例図を紹介したい。特筆すべき点として、フィボナッチ数列のように一つずらしたヤコブスタール数列の和の重みを1と1に揃えて表現すると、2のべき乗と一致するため、このこ

とを本題の図足らずという視点で活用した提案を試みている。

このような、シングル、ダブル、トリプル正三角形螺旋図を総合するような研究は、2021年のFathauerの論文<sup>[7]</sup>まで見つからないようである。まずは、次章では定番のパドヴァン数列とペラン数列の基準となるプラスチック比に焦点を当てて、シングル正三角形螺旋図を考察し、その後の章で、フィボナッチ数列や $k$ -ペル数列の基準となるプライマリーの貴金属比にも焦点を変更してダブル螺旋図を考察する。続いて、シングル螺旋図、ダブル螺旋図に続いて、トリプル正三角形螺旋図として、ヤコブスタール数列の修正版による正三角形の螺旋図を考察する。

## 2. プラスチック比、関連する数列の公式

プラスチック比もしくはプラスチック数と呼ばれる数値は、

$$\rho = 1.3247195\dots, \quad \because \rho^3 = \rho + 1 \quad (1)$$

の数式の解である。厳密には累乗根を用いて

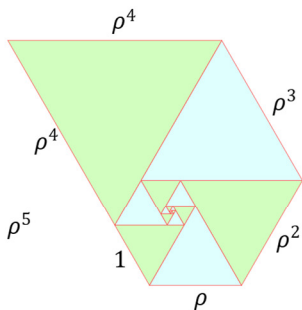
$$\rho = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{6}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{6}}} \quad (2)$$

と表記できるのだが、三次方程式の解であるが故に数値の大きさを感じるにはやや取っ付きにくいかもしれない。式(1)(2)の解を数値として眺めてみると黄金比よりも小さいことがわかる。しかしながら、この数値は次の多重

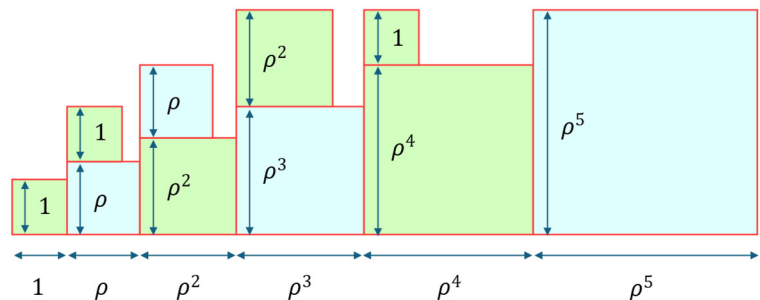
Plastic ratio

$$\because \rho^3 = \rho + 1 \text{ and}$$

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} = 1.3247\dots$$



$$\begin{aligned} \rho^3 &= \rho + 1 \\ \rho^5 &= \rho^4 + 1 = \rho^3 + \rho^2 \end{aligned}$$



### Examples

Padovan sequence :  $(g_1, g_2, g_3) = (1, 1, 1)$

Perrin sequence :  $(g_1, g_2, g_3) = (3, 0, 2)$

$$P_{(1,1),0}^{(g_1, g_2, g_3)} = g_1,$$

$$P_{(1,1),1}^{(g_1, g_2, g_3)} = g_2,$$

$$P_{(1,1),2}^{(g_1, g_2, g_3)} = g_3,$$

$$P_{(1,1),j}^{(g_1, g_2, g_3)} = 1 \cdot P_{(1,1),j-2}^{(g_1, g_2, g_3)} + 1 \cdot P_{(1,1),j-3}^{(g_1, g_2, g_3)} \quad (j \geq 3)$$

or

$$P_{(1,1),j}^{(g_1, g_2, g_3)} = 1 \cdot P_{(1,1),j-1}^{(g_1, g_2, g_3)} + 1 \cdot P_{(1,1),j-5}^{(g_1, g_2, g_3)} \quad (j \geq 5)$$

$$P_{(1,1),0}^{(1,1,1)} = 1$$

$$P_{(1,1),1}^{(1,1,1)} = 1$$

$$P_{(1,1),2}^{(1,1,1)} = 1$$

$$P_{(1,1),0}^{(3,0,2)} = 3$$

$$P_{(1,1),1}^{(3,0,2)} = 0$$

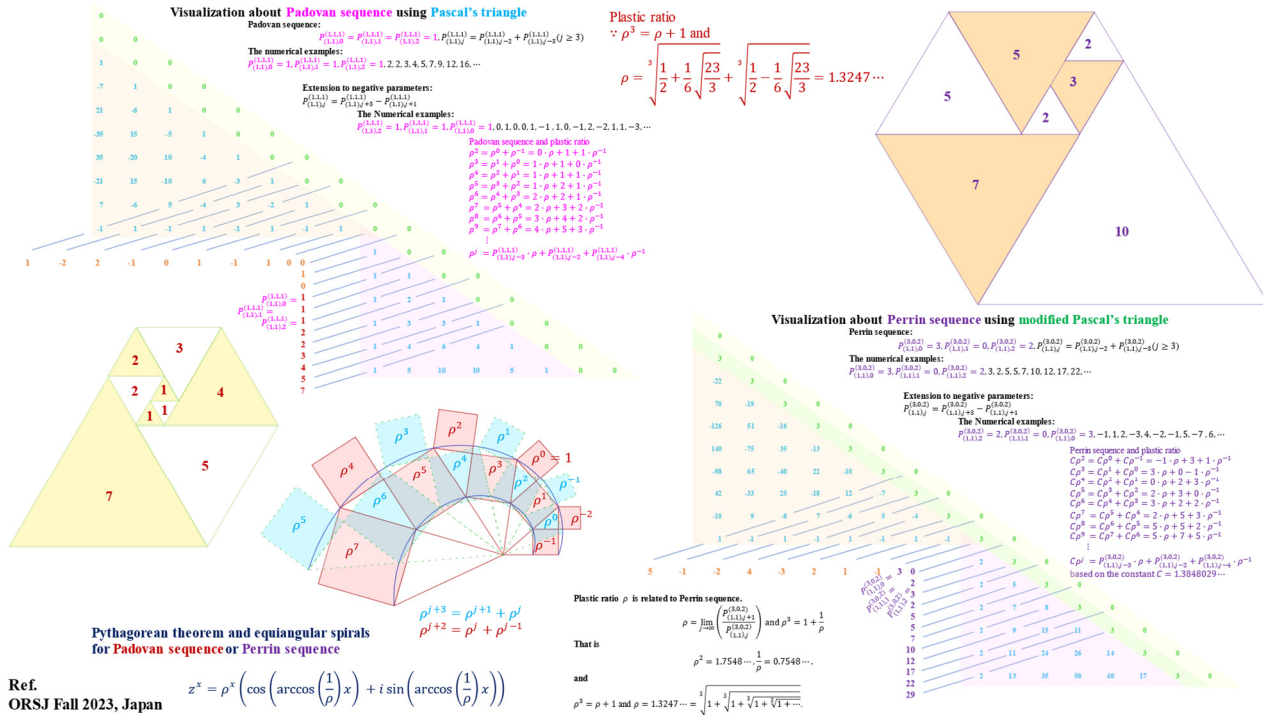
$$P_{(1,1),2}^{(3,0,2)} = 2$$

$$\rho = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{P_{(1,1),j+1}^{(g_1, g_2, g_3)}}{P_{(1,1),j}^{(g_1, g_2, g_3)}} \right) \text{ and } \rho^3 = 1 + \frac{1}{\rho}$$

$$\rho = 1.3247\dots = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}}$$

Ref. Annual meeting of Kansai branch of JSGS 2023, Japan, 2024

図1 プラスチック比の公式の視覚化<sup>[2,4,6]</sup>



わざとリズムを崩すように数式

$$\rho^5 = \rho^4 + 1 \text{ or } \rho^5 = \rho^3 + \rho^2 \quad (4)$$

が現れてくることもわかる<sup>[2,11]</sup>. この式(4)が図学会関西支部学術講演会の発表では非常に重要な役割を果たした. このことを理解するために, 図1の正三角形を連ねた螺旋図を見ていただきたい. この図から式(4)を用いたプラスチック比の正三角形を連ねた螺旋図の原理が分かる. 式(4)の両辺に  $\rho$  を乗じると図1の正三角形を連ねた螺旋図は拡大するし, 除すると縮小していくことが読み取れる. このように厳密に螺旋図を構成する特徴があることはパドヴァン数列による例証と比較して活用が少ないようである. いま, 言及したパドヴァン数列

$$\begin{aligned} P_{(1,1),0}^{(1,1,1)} &= P_{(1,1),1}^{(1,1,1)} = P_{(1,1),2}^{(1,1,1)} = 1, \\ P_{(1,1),j}^{(1,1,1)} &= P_{(1,1),j-2}^{(1,1,1)} + P_{(1,1),j-3}^{(1,1,1)} \quad (j \geq 3) \end{aligned} \quad (5)$$

はプラスチック比ともとても相性が良い<sup>[3,4]</sup>. パドヴァン数列は式(5)の上付きに記すように初項から3つの設定値を1と置き, 下付きに記すように1つスキップして二つ手前と三つ手前を重みが共に1である和として数列を形成する特徴がある. プラスチック比とパドヴァン数列は一つスキップするという共通の特徴を有することで数学的魅力を兼ね備えている.

同様に, ペラン数列

$$\begin{aligned} P_{(1,1),0}^{(3,0,2)} &= 3, P_{(1,1),1}^{(3,0,2)} = 0, P_{(1,1),2}^{(3,0,2)} = 2, \\ P_{(1,1),j}^{(3,0,2)} &= P_{(1,1),j-2}^{(3,0,2)} + P_{(1,1),j-3}^{(3,0,2)} \quad (j \geq 3) \end{aligned} \quad (6)$$

も一つスキップする数列として知られている<sup>[5,6]</sup>. この数式は上付きで示す(3,0,2)が記す通り, 初項がパドヴァン数列と異なるだけで表記できる. この両者は図2で視覚化するように正三角形を連ねた螺旋図を描けるだけでなく, 著者はペラン数列もパスカルの三角形の修正版として2023年の図学会大会で公表している<sup>[27]</sup>. 後ほど, 数列の特徴と正三角形螺旋の特徴を同時に活かすことができるため, 加えて例示している<sup>[9,10]</sup>.

ここで, 図1に示すように初項から三つの数値を数列が成り立つように任意に,  $(g_1, g_2, g_3)$  と柔軟に変更して設定できるよう一般化した

$$\begin{aligned} P_{(1,1),0}^{(g_1, g_2, g_3)} &= g_1, \\ P_{(1,1),1}^{(g_1, g_2, g_3)} &= g_2, \\ P_{(1,1),2}^{(g_1, g_2, g_3)} &= g_3, \\ P_{(1,1),j}^{(g_1, g_2, g_3)} &= P_{(1,1),j-2}^{(g_1, g_2, g_3)} + P_{(1,1),j-3}^{(g_1, g_2, g_3)} \quad (j \geq 3) \end{aligned} \quad (7)$$

なる数列を考えてみたい. この式(7)はプラスチック比と関連する設定値が一般化されたワン・スキップ型数列であり, これを次章以降でシングル正三角形の螺旋図として視覚化しながらその考察を取り扱ってみたい.

### 3. パドヴァン数列とペラン数列の視覚化

再度, 図2を見ていただきたい. パドヴァン数列とペラン数列の両数列は, パスカルの三角形の修正版や正三角形による螺旋図を視覚化できる. また, 蛇足ではあるがプラスチック比はピタゴラスの定理を用いると正三角形による螺旋図だけではなく等角螺旋も描ける特徴があることも例示している.

正三角形を連ねた螺旋図では, 図2の右側に示す正三角形を連ねた螺旋図がパドヴァン数列を構成しており, 左側に示す螺旋図はペラン数列を構成している. 図2からわかるように, パドヴァン数列には図あまりや図足らずは認められず正確に螺旋図を描ける. このように, パドヴァン数列は正三角形を連ねる螺旋として平面幾何学的に優秀な特徴を有する.

一方で, ペラン数列による螺旋はどのような特徴が見つかるであろうか. 図2の右側の正三角形螺旋図を確認すると, 初項の3が図あまりの状態であることが確認できる. 果たしてこのことは図としての図形の性質を追求するには図が収まりよく整合していないことから都合が良くないことであろうか. また他にもプラスチック比と関連した類似の設定値を一般化した(7)で示すワン・スキップ型の数列では, どのように正三角形を連ねる螺旋図と結びつくのであろうかという疑問が残ったので, 調査を進めてみたが先行研究を把握できなかったことから図学会関西支部学術講演会でその考察を行なった.

このことを説明する題材の始めとして, 次節ではプラスチック比を近似した簡素な比率を用いてプラスチック比に関連するワン・スキップ型の数列を構成するプロトタイプを考えてみたい.

#### 3.1. 人為的に図足らずを組み込むプラスチック比を基準とする正三角形による螺旋図の一例

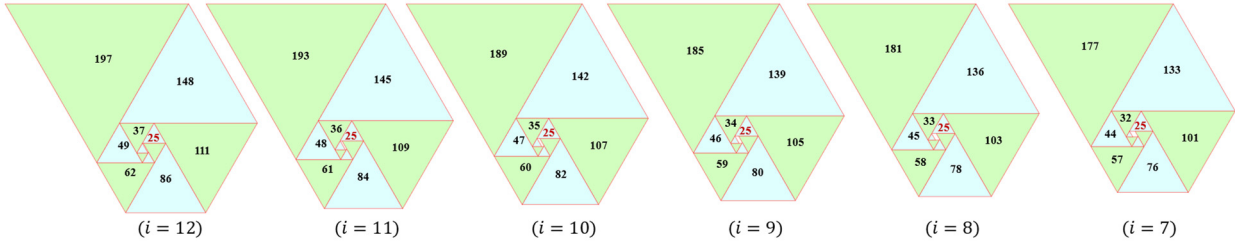
2章の式(4)を参考にすると類似する数列は式(7)を

$$P_{(1,1),j}^{(g_1, g_2, g_3)} = P_{(1,1),j-1}^{(g_1, g_2, g_3)} + P_{(1,1),j-5}^{(g_1, g_2, g_3)} \quad (j \geq 5) \quad (8)$$

として表記し直すことができる特徴がある. このため, 式(7)と(8)の両式を用いると正三角形は容易に描けることを紹介したい. まず, 簡素な近似値として具体的には, 図学会関西支部学術講演会で図3に示すシングル正三角形の螺旋図をプロトタイプとして取り上げて考察を行なった. いま, 図3に示すように

$$\begin{aligned} P_{(1,1),0}^{(8,12,13)} &= 8, \\ P_{(1,1),1}^{(8,12,13)} &= 12, \\ P_{(1,1),2}^{(8,12,13)} &= 13, \\ P_{(1,1),j}^{(8,12,13)} &= P_{(1,1),j-2}^{(8,12,13)} + P_{(1,1),j-3}^{(8,12,13)} \quad (j \geq 3) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
p_{(1,1),1}^{(i,12,13)} &= i, p_{(1,1),2}^{(i,12,13)} = 12, p_{(1,1),3}^{(i,12,13)} = 13, \\
p_{(1,1),j}^{(i,12,13)} &= p_{(1,1),j-2}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),j-3}^{(i,12,13)} \quad (j \geq 4) \\
\text{or } p_{(1,1),j}^{(i,12,13)} &= p_{(1,1),j-1}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),j-5}^{(i,12,13)} \quad (j \geq 6)
\end{aligned}$$



Ref. Annual meeting of Kansai branch of JSGS 2023, Japan, 2024

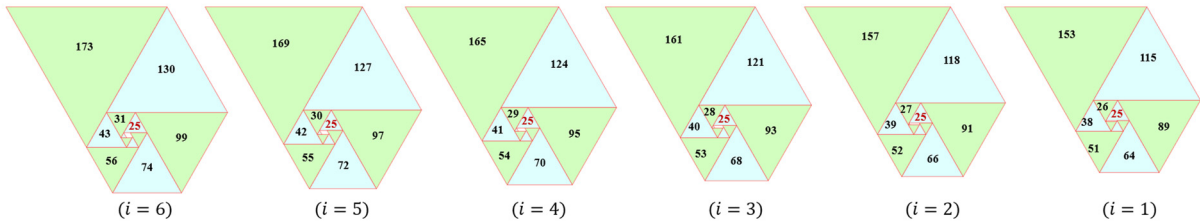
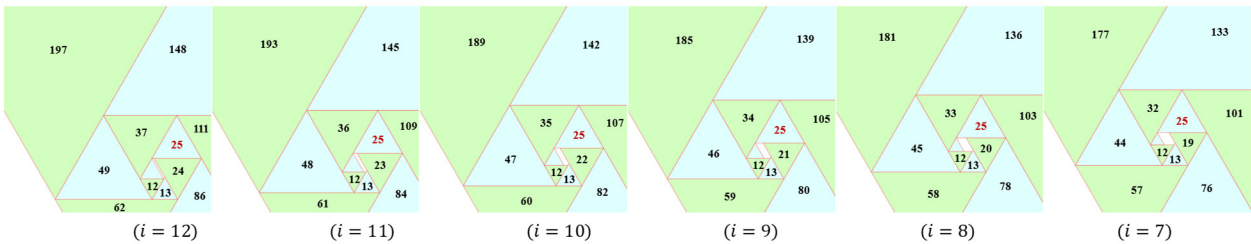


図4 任意の数値を置いて正三角形を連ねた螺旋図が描けるか試す例図<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned}
p_{(1,1),5}^{(i,12,13)} &= p_{(1,1),2}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),1}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),0}^{(i,12,13)} = 13 + 12 + i \\
p_{(1,1),5}^{(i,12,13)} &= p_{(1,1),4}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),0}^{(i,12,13)} = 25 + i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{(1,1),0}^{(i,12,13)} &= i, p_{(1,1),1}^{(i,12,13)} = 12, p_{(1,1),2}^{(i,12,13)} = 13, \\
p_{(1,1),j}^{(i,12,13)} &= p_{(1,1),j-2}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),j-3}^{(i,12,13)} \quad (j \geq 4) \\
\text{or } p_{(1,1),j}^{(i,12,13)} &= p_{(1,1),j-1}^{(i,12,13)} + p_{(1,1),j-5}^{(i,12,13)} \quad (j \geq 6)
\end{aligned}$$



Ref. Annual meeting of Kansai branch of JSGS 2023, Japan, 2024

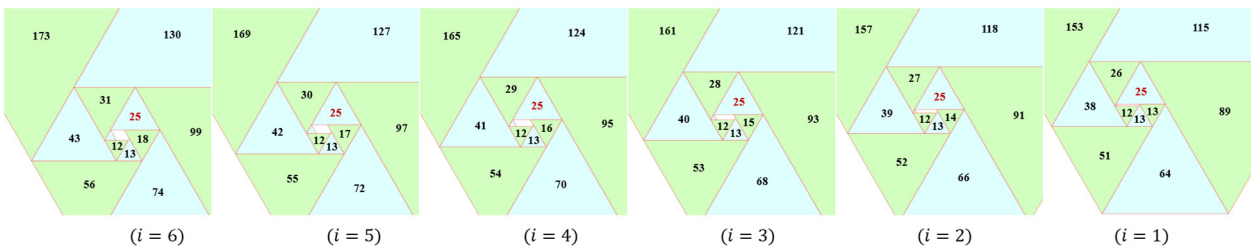


図5 図4の初項の正三角形の違いを比較するために正三角形を連ねた螺旋図を拡大<sup>[10]</sup>

を考えてみたい. この数列の作成の意図は

$$p_{(1,1),4}^{(8,12,13)} + p_{(1,1),0}^{(8,12,13)} = 25 + 8 = 33 \quad (10)$$

を用いると,  $1:8/25 = 1:0.32$ とプラスチック比に比較的近い簡素な比率で例示できる. このため, 肉眼ではプラスチック比によるシングル螺旋図と比較してもほとんど差異がなくその特徴の図示が可能であると想定できる.

すなわち, この値を活用するのは, プラスチック比に習って正三角形を連ねた螺旋図を明確に視覚化してくれることを期待しての意図的な設定である. この例では, 25を数列が成り立つように数列の第2項を12と第3項を13に設定して25を分割できるので, 式(7)に従うワン・スキップ型数列を人為的に作成した視覚化が可能である.

この結果、図3を一瞬見ただけならば、プラスチック比による正三角形を連ねた螺旋図なのか、このプロトタイプによる数列の螺旋図なのかは判断が付きにくいことがわかる。この忘れ得ぬ重要な特徴を有するプロトタイプは次のように展開すると任意の図あまりや図足らずを許した正三角形を連ねた螺旋図の作画の可能性を拓げてくれたことを図学会関西支部学術講演会では公表できた。すなわち、数値8と25のペアを日付8月25日に見立てて、この考え方を拡大して、暦に従って8月を1月から12月まで変化させて螺旋図を描く数列の作成を行える例示が期待できる。この考え方を数式で記述すると次のようになる。

$$\begin{aligned} P_{(1,1),0}^{(i,12,13)} &= i \quad (i = 1, 2, \dots, 12), \\ P_{(1,1),1}^{(i,12,13)} &= 12, \\ P_{(1,1),2}^{(i,12,13)} &= 13, \\ P_{(1,1),j}^{(i,12,13)} &= P_{(1,1),j-2}^{(i,12,13)} + P_{(1,1),j-3}^{(i,12,13)} \quad (j \geq 3) \end{aligned} \quad (11)$$

このように記述すると、 $i = 12$ では12月25日でクリスマスまでの記述が可能となり、数値の並びに音を付けての学びや遊びを楽しむ日本人の習慣と一緒に予稿集を確認した読者がイメージするデザインだけではなく、シングル正三角形による螺旋図を用いて様々な余興を楽しむことができるかもしれない。このため、数えきれないほどのワン・スキップ型数列による正三角形を連ねた螺旋図が応用できるものと期待したい。

### 3.2. 人為的に図足らずを組み込むプラスチック比を基準とする正三角形による螺旋図の一例の応用

式(11)を用いると図4に示すように、初項が $i = 1$ から12まで変化させたときの図の違いが描ける。一見するとそれぞれの螺旋図の違いに気を取られるだけではなく、どの螺旋図も正三角形が連なっていることが把握できる。しかし、よく見てみると、微妙な変化が確認でき、そこに図足らずや図あまりの様子を知ることができる。このことをより明確に確認できるよう図4の螺旋図の中心付近を拡大した図が図5の例示である。図5を良く確認すると、 $i = 1, 2, \dots, 12$ の特徴により、シングル正三角形螺旋図の中心を位置するはずの初項付近で図足らずの様子が確認できる。

このほかにもパドヴァン数列とペラン数列を掛け合わせたワン・スキップ型数列による例示を幾通りか試してみたところ、すべて正三角形を連ねた螺旋図を描くことに成功した。もちろん、図あまりと図足らずを許したわけではあることをご承知のとおりである。したがって、図あまりもしくは図足らずを許した場合には、パドヴァン数列やペラン数列のように一つスキップするワン・ス

キップ型数列に従って正三角形を連ねた螺旋図を描ける作画方法があることがわかったので、図学会関西支部学術講演会で公表したことを再度言及しておく。本研究ではこの特徴をフィボナッチ研究集会でも報告するとともに、このことはどのように活かされるだろうかを考えてみたい。すなわち、正三角形を連ねた螺旋図を描くためには

$$P_{(1,1),j-2}^{(g_1, g_2, g_3)} + P_{(1,1),j-3}^{(g_1, g_2, g_3)} = P_{(1,1),j-1}^{(g_1, g_2, g_3)} + P_{(1,1),j-5}^{(g_1, g_2, g_3)} \quad (12)$$

を基準にワン・スキップ型数列を考案すればよいことがわかった。ただし、得られる数列の初項付近の図あまりもしくは図足らずを想定しておくことと、図を描く際に工夫し、応用を心掛ける必要があることも付記して、ワン・スキップ型数列で上手く描けた事実を強調したい。

蛇足だが、図あまりや図足らずが図の整合性を損なうので気になる場合には、正三角形をいくつまで並べられるかを考案する研究<sup>[28]</sup>もあるようなので、こちらとハイブリットで制作するとデザインにも役立てることが期待できそうである。以上のことを整理してシングル正三角形螺旋図の活用が期待できることの紹介を終える。次章では、ダブル正三角形螺旋図としてフィボナッチ数列や黄金比に関連する数列に焦点を当てて、同じ発想が適用できないかを考察する。

### 4. フィボナッチ数列を用いた正三角形による螺旋図とその応用例

フィボナッチ数列の螺旋図といえば図6に示すように正方形を用いた螺旋図を連想するのが一般的なようである。しかしながら、Sharpによるダブル正三角形螺旋図の紹介<sup>[15]</sup>のように正三角形を用いた図7のような正三角形とフィボナッチ数列を用いた螺旋図が可能である。フィボナッチ数列

$$\begin{aligned} F_{(1,1),0} &= 0, F_{(1,1),1} = 1, \\ F_{(1,1),j} &= F_{(1,1),j-1} + F_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (13)$$

によって生成されるフィボナッチ数を用いて二組の正三角形を連ねる螺旋図としてパドヴァン数列に負けず劣らず見事に作図できることは、著者が研究HPにウェブ公開するまで、日本では知られていなかったか、馴染みがなかったようである。この考え方とは別に独自に図8のように二組の正三角形を用いながらフィボナッチ数列の可視化は描けることをOR学会2023年秋季研究発表会で発表し<sup>[29]</sup>、継続して思考を続けてきた結果、同じ着想の図7に辿り着いたが、既に西洋では周知のようであった。したがって、図7のフィボナッチ数列による正三角形を用いた螺旋図は提案ではなく、紹介であることを読者に

は強調したいし、この発想から考えられる新たな表現の拡大解釈による例示方法を提案していきたい。

ところで、初項と二項の二つの項の設定値を任意な $g_0, g_1$ とする黄金比を基調とした数列のことをフィボナッチ数列と同様の特徴を多く有することからGibonacci数列<sup>[19,20]</sup>と呼び、

$$G_{(1,1),0} = g_0, G_{(1,1),1} = g_1, \\ G_{(1,1),j} = G_{(1,1),j-1} + G_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2) \quad (14)$$

なる定式化が知られている。このGibonacci数列でも図余りもしくは図足らずを許せば正三角形を連ねた螺旋図を描けることが紹介できる。図7に既に例示しているとおり、以下の数列が活用されている。一つはリュカ数列

$$L_{(1,1),0} = 2, L_{(1,1),1} = 1, \\ L_{(1,1),j} = L_{(1,1),j-1} + L_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2) \quad (15)$$

が活用され、もう一例として、ムラツ(Mulatu)数列

$$M_{(1,1),0} = 4, M_{(1,1),1} = 1, \\ M_{(1,1),j} = M_{(1,1),j-1} + M_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2) \quad (16)$$

の活用も行つて例示している。これらの数列によるダブル正三角形螺旋図は図7のとおり、黄金比を基準に派生する数列のため初項付近の図余りを除けばしっかりとダブル正三角形螺旋図を構成していることが分かった。確かに初項の図余りを許容するならば、正三角形を連ねた螺旋図が作成できることから、数列を構成する二組の数列の数值が補完し合いながら正三角形の螺旋図は組み立てられて成立していることが確認できる。したがって、

図7では式(14)の数式の重みに基づき正確に正三角形を連ねた螺旋図が構成できることが可視化されていることが理解できる。

同様に、図8からも分かるようにリュカ数列のように初項が第二項より大きいため、図7の螺旋図でも図余りを示していることも読み取れる。

## 5. $k$ -ペル数列および $k$ -ペル・リュカ数列を用いた正三角形による螺旋図とその応用例

図7のように、視覚化による正三角形の螺旋図もまた、任意の設定値により、図余りと図足らずを許せば、かなり適用範囲が広いことが期待できる。さらなる応用のため、ペル数列

$$F_{(2,1),0} = 0, F_{(2,1),1} = 1, \\ F_{(2,1),j} = 2 \cdot F_{(2,1),j-1} + F_{(2,1),j-2} \quad (j \geq 2) \quad (17)$$

とペル・リュカ数列

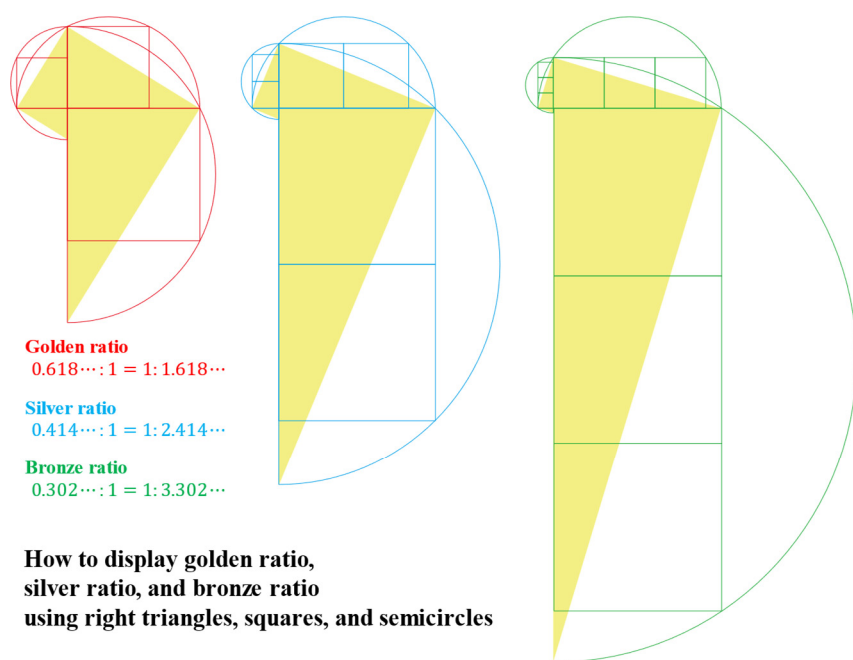
$$L_{(2,1),0} = 2, L_{(2,1),1} = 2, \\ L_{(2,1),j} = 2 \cdot L_{(2,1),j-1} + L_{(2,1),j-2} \quad (j \geq 2) \quad (18)$$

の適用も考えてみたい。また、ペル数列で2倍して足し合わせる重みを2以上の整数 $k$ に取り換えた $k$ -ペル数列

$$F_{(k,1),0} = 0, F_{(k,1),1} = 1, \\ F_{(k,1),j} = k \cdot F_{(k,1),j-1} + F_{(k,1),j-2} \quad (j \geq 2) \quad (19)$$

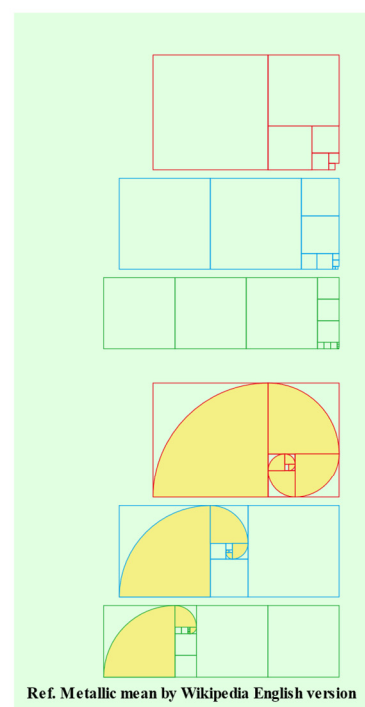
や $k$ -ペル・リュカ数列

$$L_{(k,1),0} = 2, L_{(k,1),1} = k, \\ L_{(k,1),j} = k \cdot L_{(k,1),j-1} + L_{(k,1),j-2} \quad (j \geq 2) \quad (20)$$

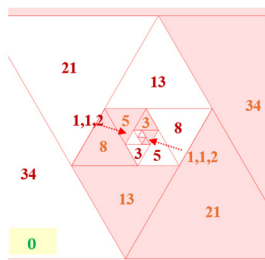


© Shingo Nakanishi, ORSJ Spring 2023, Japan

図6 プライマリーの貴金属比（黄金比，白銀比，青銅比）を用いた正方形を連ねた螺旋図

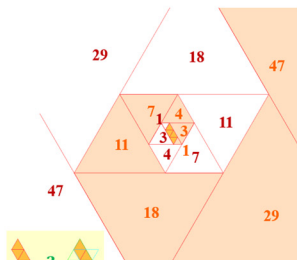


2 spirals using equilateral triangles and Fibonacci numbers



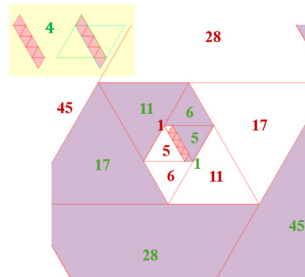
**Fibonacci sequence**  
 $F_{(1,1),0} = 0, F_{(1,1),1} = 1,$   
 $F_{(1,1),j} = F_{(1,1),j-1} + F_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2)$

2 spirals using equilateral triangles and Lucas numbers



**Lucas sequence**  
 $L_{(1,1),0} = 2, L_{(1,1),1} = 1,$   
 $L_{(1,1),j} = L_{(1,1),j-1} + L_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2)$

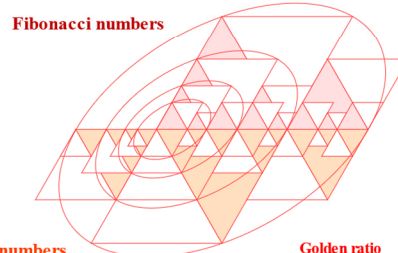
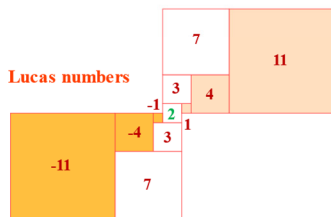
2 spirals using equilateral triangles and Mulatu numbers



**Mulatu sequence**  
 $M_{(1,1),0} = 4, M_{(1,1),1} = 1,$   
 $M_{(1,1),j} = M_{(1,1),j-1} + M_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2)$

**Fibonacci numbers**  
 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...  
**Lucas numbers**  
 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...  
**Mulatu numbers**  
 4, 1, 5, 6, 11, 17, 28, 45, ...

Rotationally symmetric spirals with equilateral triangles & They will be one flesh.



Refs. ORSJ Fall 2023, Japan, Annual meeting of Japan Fibonacci association, 2024

図7 フィボナッチ数列, リュカ数列, ムラツ数列を用いた二組の正三角形を連ねた螺旋図<sup>[29]</sup>

Golden ratio ( $n = 1$ )  
 $\lambda_{(1,1)}^1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618 \dots$

**Fibonacci sequence ( $n = 1$ )**  
 $F_{(1,1),0} = 0, F_{(1,1),1} = 1,$   
 $F_{(1,1),j} = F_{(1,1),j-1} + F_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2)$

**Lucas sequence ( $n = 1$ )**  
 $L_{(1,1),0} = 2, L_{(1,1),1} = 1,$   
 $L_{(1,1),j} = L_{(1,1),j-1} + L_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2)$

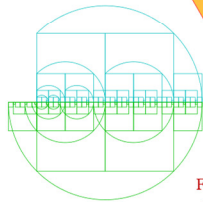
Silver ratio ( $n = 2$ )  
 $\lambda_{(2,1)}^1 = 1 + \sqrt{2} = 2.414 \dots$

**Pell sequence ( $n = 2$ )**  
 $F_{(2,1),0} = 0, F_{(2,1),1} = 1,$   
 $F_{(2,1),j} = 2 \cdot F_{(2,1),j-1} + F_{(2,1),j-2} \quad (j \geq 2)$

**Pell Lucas sequence ( $n = 2$ )**  
 $L_{(2,1),0} = 2, L_{(2,1),1} = 2,$   
 $L_{(2,1),j} = 2 \cdot L_{(2,1),j-1} + L_{(2,1),j-2} \quad (j \geq 2)$



( $a = 1, b = 1$ )



( $a = 2, b = 1$ )

Ref. ORSJ Fall 2023, Japan

$$\lambda_{(n,1)}^k - F_{(n,1),k} \cdot \lambda_{(n,1)} - 1 \cdot F_{(n,1),k-1} = 0 \quad \text{or} \quad \lambda_{(n,1)}^2 - n \cdot \lambda_{(n,1)} - 1 = 0$$

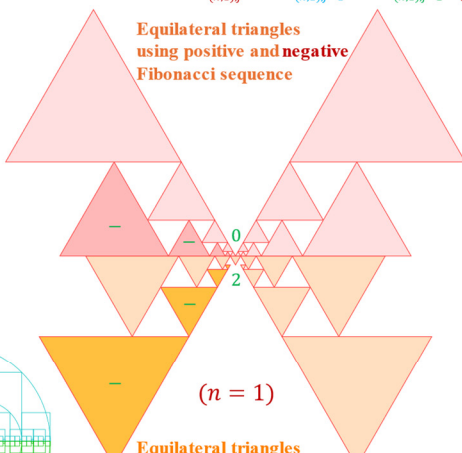
$$\sqrt{n^2 + 4} \lambda_{(n,1)}^k - L_{(n,1),k} \cdot \lambda_{(n,1)} - 1 \cdot L_{(n,1),k-1} = 0$$

$$F_{(n,1),0} = 0, F_{(n,1),1} = 1, F_{(n,1),j} = n \cdot F_{(n,1),j-1} + 1 \cdot F_{(n,1),j-2} \quad (j \geq 2)$$

$$L_{(n,1),0} = 2,$$

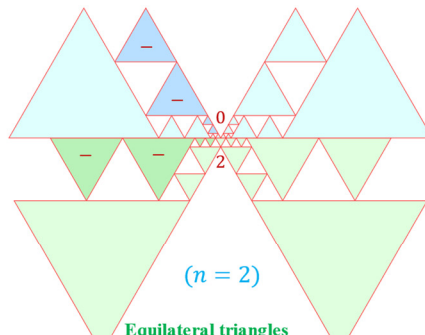
$$L_{(n,1),1} = n,$$

$$L_{(n,1),j} = n \cdot L_{(n,1),j-1} + 1 \cdot L_{(n,1),j-2} \quad (j \geq 2)$$



Equilateral triangles using positive and negative Fibonacci sequence

Equilateral triangles using positive and negative Lucas sequence



Equilateral triangles using positive and negative Pell sequence

Equilateral triangles using positive and negative Pell Lucas sequence

Pell sequence ... , 169, -70, 29, -12, 5, -2, 1, 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, ...

Pell Lucas sequence ... , 198, -82, 34, -14, 6, -2, 2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, ...

図8 フィボナッチ数列, リュカ数列, ペル数列, ペル・リュカ数列と正方形と正三角形の関係図<sup>[29]</sup>

も正三角形螺旋図の作画を試みたい。これらの発想によるダブル型螺旋図の作画が図9に示されている。すなわち、二組の正三角形を連ねた螺旋図のうち、一つが2倍もしくは $k$ 倍した横並びを構成した螺旋図の例示として発想を拡張するならば、フィボナッチ数列やリュカ数列と同様に描けることが明らかになった。以上のように、ダ

ブル正三角形螺旋図の作画が可能となった。同時に基準となる比率がプライマリーの貴金属比と一致するので、これらの比率でもダブル正三角形螺旋を同様に描けることが分かった。そこで、図9にダブル正三角形螺旋図として図示した数列と、黄金比、白銀比、青銅比の螺旋図を並べながらその性質が類似していることが把握できるよ



うに図示してみた。実は、これらの比の例示では、正方形による紹介<sup>[30]</sup>や比による長方形による例示<sup>[31]</sup>が圧倒的に多いことは周知である。加えて、貴金属比を活用した正三角形によるタイリングの研究<sup>[32]</sup>も存在するが、本研究で取り扱う貴金属比によるダブル型正三角形螺旋図は従来の正方形による螺旋図の提案を正三角形に置き換えたアイデアとして認知できるし、貴金属比のための正三角形活用の新たな提案として独自のものであるため、これを機会にダブル正三角形螺旋での新たなデザインの考案や応用を期待したい。

## 6. ヤコブスタール数列の例図

ところで、セカンダリーの第2貴金属比は下記の二次方程式から

$$\begin{aligned} \lambda_{(1,2)}^2 &= \lambda_{(1,2)} + 2, \\ \therefore \lambda_{(1,2)} &= 2. \end{aligned} \quad (21)$$

と求まる。このときの足し合わす重みが1:2であり、フィボナッチ数列の足し合わす重みが式(21)に習うとき、ヤコブスタール数列

$$\begin{aligned} F_{(1,2),0} &= 0, F_{(1,2),1} = 1, \\ F_{(1,2),j} &= F_{(1,2),j-1} + 2 \cdot F_{(1,2),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (22)$$

が表記できる。わが国ではペル数列を基準としたプライマリーの貴金属比のみが注目されて、セカンダリーの貴金属比はあまり知られていないようである。このため、

著者は当初、貴金属比の類似比と呼びながら研究を進めてきた。したがって、類似比としてセカンダリーの第2貴金属比について、当初はこれから紹介する例図の特性を見つけたため、その魅力を感じながら研究を始めたこともあり、こちらを白銀比の類似比として取り扱って公表してきた<sup>[33-37]</sup>。

貴金属比の発案者であるDe Spinadelによればニッケル比と命名されたいが、プライマリーの貴金属比にもいくつかの比が同じ呼び方として定着しつつあるので、本報では混乱を避けたいので単にセカンダリーの第2貴金属比もしくは副第2貴金属比と呼ぶことにしたい。一方で、リュカ数列のヤコブスタール数列版は、ヤコブスタール・リュカ数列と呼ばれており、

$$\begin{aligned} L_{(1,2),0} &= 2, L_{(1,2),1} = 1, \\ L_{(1,2),j} &= L_{(1,2),j-1} + 2 \cdot L_{(1,2),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (23)$$

と表記できる。したがって、ヤコブスタール数列を表記する式(22)は、パドヴァン数列の表記に合わせると

$$\begin{aligned} P_{(1,2),0}^{(0,1)} &= 0, P_{(1,2),1}^{(0,1)} = 1, \\ P_{(1,2),j}^{(0,1)} &= P_{(1,2),j-1}^{(0,1)} + 2 \cdot P_{(1,2),j-2}^{(0,1)} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (24)$$

と表すことも可能で、ヤコブスタール・リュカ数列を表記する式(23)もまた

$$\begin{aligned} P_{(1,2),0}^{(2,1)} &= 2, P_{(1,2),1}^{(2,1)} = 1, \\ P_{(1,2),j}^{(2,1)} &= P_{(1,2),j-1}^{(2,1)} + 2 \cdot P_{(1,2),j-2}^{(2,1)} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (25)$$

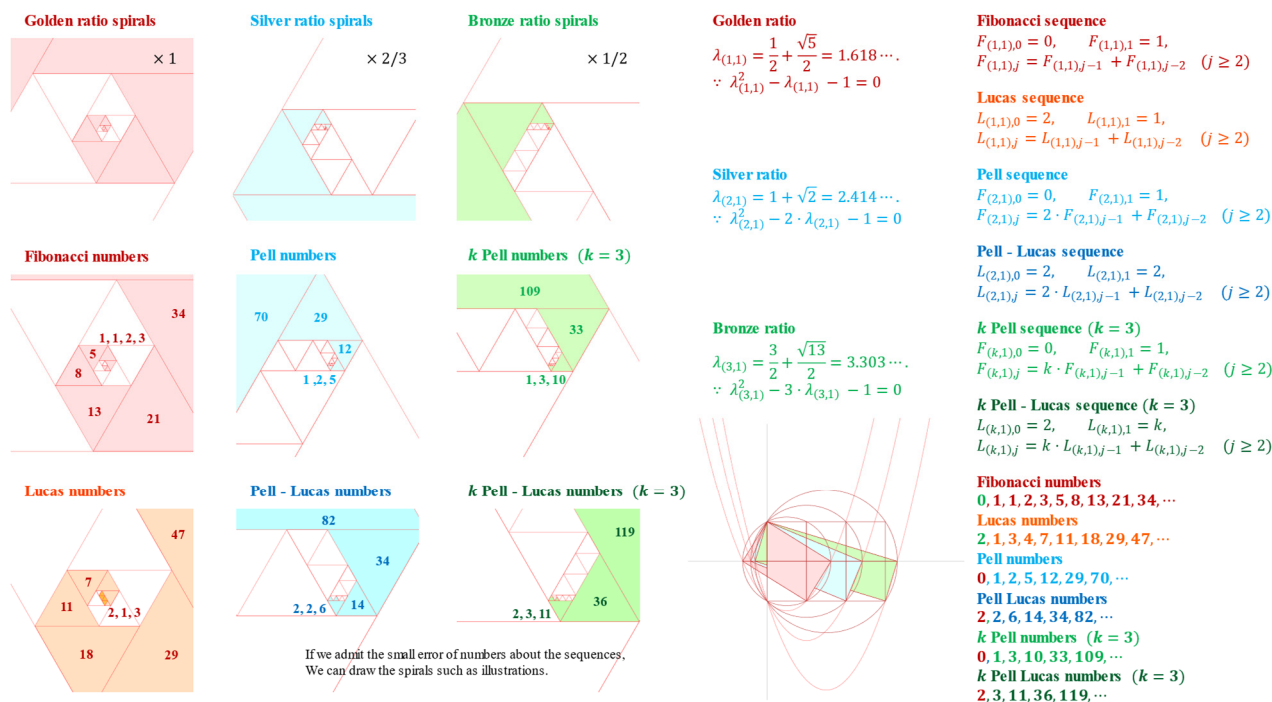


図9  $k$ -ペル数列もしくは  $k$ -ペル・リュカ数列を用いた正三角形を連ねた螺旋図( $k = 1, 2, 3$ )とプライマリーの貴金属比(黄金比, 白銀比, 青銅比)( $k = 1, 2, 3$ )による正三角形螺旋図の提案

**Visualizations of golden ratio (first ratio) using Fibonacci sequence and Lucas sequence**

Fibonacci sequence  
 $F_{(1,1),0} = 0, F_{(1,1),1} = 1, F_{(1,1),j} = F_{(1,1),j-1} + F_{(1,1),j-2} (j \geq 2)$   
**First ratio 0.618... : 1 = 1 : 1.618...**

Lucas sequence  
 $L_{(1,1),0} = 2, L_{(1,1),1} = 1, L_{(1,1),j} = L_{(1,1),j-1} + L_{(1,1),j-2} (j \geq 2)$

Golden ratio  
 $\lambda_{(1,1)}^1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618...$

Fibonacci sequence  
 ..., 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...  
 Lucas sequence  
 ..., 7, -4, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, ...

$$\begin{aligned} \lambda_{(1,1)}^{-1} &= \lambda_{(1,1)}^{-2} + \lambda_{(1,1)}^{-3} = 0 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \\ \lambda_{(1,1)}^0 &= \lambda_{(1,1)}^{-1} + \lambda_{(1,1)}^1 = 1 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \\ \lambda_{(1,1)}^1 &= \lambda_{(1,1)}^0 + \lambda_{(1,1)}^2 = 1 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^1 \\ \lambda_{(1,1)}^2 &= \lambda_{(1,1)}^1 + \lambda_{(1,1)}^3 = 2 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^2 \\ \lambda_{(1,1)}^3 &= \lambda_{(1,1)}^2 + \lambda_{(1,1)}^4 = 3 + 2 \cdot \lambda_{(1,1)}^3 \\ &\vdots \\ \lambda_{(1,1)}^j &= F_{(1,1),j+1} + F_{(1,1),j} \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \end{aligned}$$

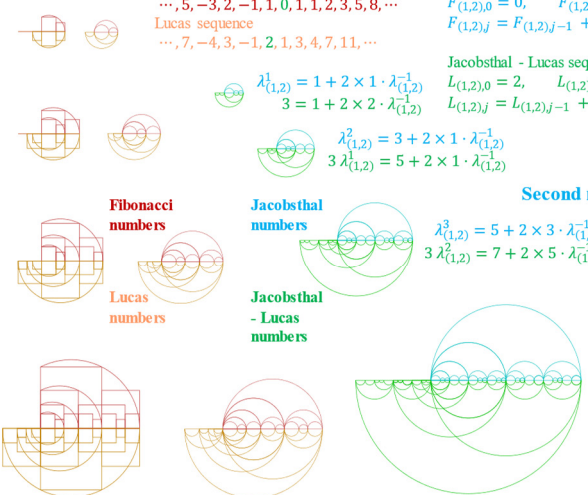
$$\begin{aligned} \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^{-1} &= \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^{-2} + \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^{-3} = 2 + (-1) \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \\ \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^0 &= \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^{-1} + \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^1 = 1 + 2 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \\ \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^1 &= \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^0 + \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^2 = 3 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \\ \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^2 &= \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^1 + \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^3 = 4 + 3 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \\ \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^3 &= \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^2 + \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^4 = 7 + 4 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \\ &\vdots \\ \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^j &= L_{(1,1),j+1} + L_{(1,1),j} \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \end{aligned}$$

$$\lambda_{(1,1)}^1 = 1 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \quad \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^1 = 1 + 2 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$$

$$\lambda_{(1,1)}^2 = 2 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \quad \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^2 = 3 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$$

$$\lambda_{(1,1)}^3 = 3 + 2 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \quad \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^3 = 4 + 3 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$$

$$\lambda_{(1,1)}^4 = 5 + 3 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} \quad \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^4 = 7 + 4 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$$



Jacobsthal sequence  
 $F_{(1,2),0} = 0, F_{(1,2),1} = 1, F_{(1,2),j} = F_{(1,2),j-1} + 2 \cdot F_{(1,2),j-2} (j \geq 2)$

Jacobsthal - Lucas sequence  
 $L_{(1,2),0} = 2, L_{(1,2),1} = 1, L_{(1,2),j} = L_{(1,2),j-1} + 2 \cdot L_{(1,2),j-2} (j \geq 2)$

$$\lambda_{(1,2)}^1 = 1 + 2 \times 1 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} = 3 = 1 + 2 \times 2 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$$

$$\lambda_{(1,2)}^2 = 3 + 2 \times 1 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} = 5 = 5 + 2 \times 1 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$$

$$\lambda_{(1,2)}^3 = 5 + 2 \times 3 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} = 7 = 7 + 2 \times 5 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$$

**Second ratio 0.5 : 1 = 1 : 2**

**Visualizations of second ratio using Jacobsthal sequence and Jacobsthal-Lucas sequence**

$$\lambda_{(1,2)}^4 = 11 + 2 \times 5 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} = 31 = 17 + 2 \times 7 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$$

Jacobsthal sequence  
 ..., -5/2^4, 3/2^3, -1/2^2, 1/2, 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, ...  
 Jacobsthal - Lucas sequence  
 ..., 17/2^4, -7/2^3, 5/2^2, -1/2, 2, 1, 5, 7, 17, 31, ...

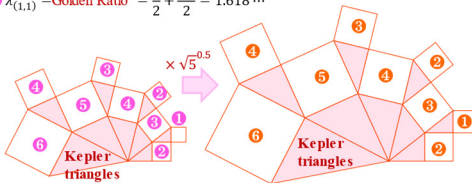
Second ratio  
 $\lambda_{(1,2)}^1 = 2$

Ref. ORSJ Fall 2023, Japan

図10 黄金比とフィボナッチ数列, リュカ数列および副第2貴金属比とヤコブスタール数列, ヤコブスタール・リュカ数列の公式の視覚化<sup>[29]</sup>

How to structure equiangular spirals using Pythagorean theorem about Fibonacci sequence  $F_{(1,1),0} = 0, F_{(1,1),1} = 1, F_{(1,1),j} = F_{(1,1),j-1} + F_{(1,1),j-2} (j \geq 2)$  or Lucas sequence  $L_{(1,1),0} = 2, L_{(1,1),1} = 1, L_{(1,1),j} = L_{(1,1),j-1} + L_{(1,1),j-2} (j \geq 2)$

⑤  $\lambda_{(1,1)}^1 = \text{Golden Ratio} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618...$



⑥  $\sqrt{5} \times \lambda_{(1,1)}^1 = \sqrt{5} \times \text{Golden Ratio} = 3.618...$

Pythagorean theorem using Fibonacci sequence

$$\lambda_{(1,1)}^j = \lambda_{(1,1)}^{j-1} + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{j-2} = F_{(1,1),j+1} + 1 \cdot F_{(1,1),j} \lambda_{(1,1)}^{-1}$$

Pythagorean theorem using Lucas sequence

$$\sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^j = \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^{j-1} + 1 \cdot \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^{j-2} = L_{(1,1),j+1} + 1 \cdot L_{(1,1),j} \lambda_{(1,1)}^{-1}$$

- ①  $\lambda_{(1,1)}^{-1} = \lambda_{(1,1)}^{-2} + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-3} = 0 + 1 \times 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$
- ②  $\lambda_{(1,1)}^0 = \lambda_{(1,1)}^{-1} + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^1 = 1 + 1 \times 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} = 1$
- ③  $\lambda_{(1,1)}^1 = \lambda_{(1,1)}^0 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^2 = 1 + 1 \times 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^1 = \text{Golden ratio}$
- ④  $\lambda_{(1,1)}^2 = \lambda_{(1,1)}^1 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^3 = 2 + 1 \times 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^2$
- ⑤  $\lambda_{(1,1)}^3 = \lambda_{(1,1)}^2 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^4 = 3 + 1 \times 2 \cdot \lambda_{(1,1)}^3$
- ⑥  $\lambda_{(1,1)}^4 = \lambda_{(1,1)}^3 + 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^5 = 5 + 1 \times 3 \cdot \lambda_{(1,1)}^4$

- ①  $\sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^{-1} = \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^{-2} + 1 \cdot \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^{-3} = 2 + 1 \times (-1) \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$
- ②  $\sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^0 = \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^{-1} + 1 \cdot \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^1 = 1 + 1 \times 2 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} = \sqrt{5}$
- ③  $\sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^1 = \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^0 + 1 \cdot \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^2 = 3 + 1 \times 1 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1} = \sqrt{5} \times \text{Golden ratio}$
- ④  $\sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^2 = \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^1 + 1 \cdot \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^3 = 4 + 1 \times 3 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$
- ⑤  $\sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^3 = \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^2 + 1 \cdot \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^4 = 7 + 1 \times 4 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$
- ⑥  $\sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^4 = \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^3 + 1 \cdot \sqrt{5}\lambda_{(1,1)}^5 = 11 + 1 \times 7 \cdot \lambda_{(1,1)}^{-1}$

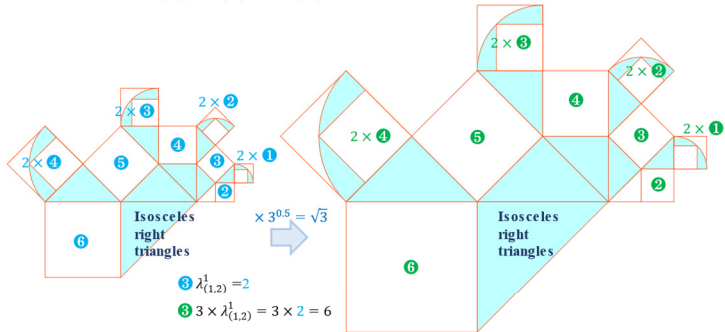
How to describe equiangular spirals using Pythagorean theorem about Jacobsthal sequence  $F_{(1,2),0} = 0, F_{(1,2),1} = 1, F_{(1,2),j} = F_{(1,2),j-1} + 2 \cdot F_{(1,2),j-2} (j \geq 2)$  or Jacobsthal-Lucas sequence  $L_{(1,2),0} = 2, L_{(1,2),1} = 1, L_{(1,2),j} = L_{(1,2),j-1} + 2 \cdot L_{(1,2),j-2} (j \geq 2)$

Pythagorean theorem using Jacobsthal sequence

$$\lambda_{(1,2)}^j = \lambda_{(1,2)}^{j-1} + 2 \cdot \lambda_{(1,2)}^{j-2} = F_{(1,2),j+1} + 2 \cdot F_{(1,2),j} \lambda_{(1,2)}^{-1}$$

Pythagorean theorem using Jacobsthal-Lucas sequence

$$3\lambda_{(1,2)}^j = 3\lambda_{(1,2)}^{j-1} + 2 \cdot 3\lambda_{(1,2)}^{j-2} = L_{(1,2),j+1} + 2 \cdot L_{(1,2),j} \lambda_{(1,2)}^{-1}$$



③  $\lambda_{(1,2)}^1 = 2$   
 ⑥  $3 \times \lambda_{(1,2)}^1 = 3 \times 2 = 6$

- ①  $\lambda_{(1,2)}^{-1} = \lambda_{(1,2)}^{-2} + 2 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-3} = 0 + 2 \times 1/2 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$
- ②  $\lambda_{(1,2)}^0 = \lambda_{(1,2)}^{-1} + 2 \cdot \lambda_{(1,2)}^1 = 1 + 2 \times 0 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} = 1$
- ③  $\lambda_{(1,2)}^1 = \lambda_{(1,2)}^0 + 2 \cdot \lambda_{(1,2)}^2 = 1 + 2 \times 1 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} = 2$
- ④  $\lambda_{(1,2)}^2 = \lambda_{(1,2)}^1 + 2 \cdot \lambda_{(1,2)}^3 = 3 + 2 \times 1 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$
- ⑤  $\lambda_{(1,2)}^3 = \lambda_{(1,2)}^2 + 2 \cdot \lambda_{(1,2)}^4 = 5 + 2 \times 3 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$
- ⑥  $\lambda_{(1,2)}^4 = \lambda_{(1,2)}^3 + 2 \cdot \lambda_{(1,2)}^5 = 11 + 2 \times 5 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$

- ①  $3\lambda_{(1,2)}^{-1} = 3\lambda_{(1,2)}^{-2} + 2 \cdot 3\lambda_{(1,2)}^{-3} = 2 + 2 \times (-1/2) \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$
- ②  $3\lambda_{(1,2)}^0 = 3\lambda_{(1,2)}^{-1} + 2 \cdot 3\lambda_{(1,2)}^1 = 1 + 2 \times 2 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} = 3$
- ③  $3\lambda_{(1,2)}^1 = 3\lambda_{(1,2)}^0 + 2 \cdot 3\lambda_{(1,2)}^2 = 5 + 2 \times 1 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1} = 3 \times 2$
- ④  $3\lambda_{(1,2)}^2 = 3\lambda_{(1,2)}^1 + 2 \cdot 3\lambda_{(1,2)}^3 = 7 + 2 \times 5 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$
- ⑤  $3\lambda_{(1,2)}^3 = 3\lambda_{(1,2)}^2 + 2 \cdot 3\lambda_{(1,2)}^4 = 17 + 2 \times 7 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$
- ⑥  $3\lambda_{(1,2)}^4 = 3\lambda_{(1,2)}^3 + 2 \cdot 3\lambda_{(1,2)}^5 = 31 + 2 \times 17 \cdot \lambda_{(1,2)}^{-1}$

Ref. ORSJ Fall 2023, Japan

図11 黄金比とフィボナッチ数列, リュカ数列および副第2貴金属比とヤコブスタール数列, ヤコブスタール・リュカ数列のピタゴラスの定理による等角螺旋図の視覚化<sup>[32]</sup>

と同様に表わすことができる。したがって、式(24)(25)のように初項と第2項を強調して書き換えて解説するときがあることをご承知いただきたい。以上までの数式はそれぞれが似ているくらいにしか思えないかもしれないが、

図10のように例示<sup>[29]</sup>してみるとヤコブスタール数列とヤコブスタール・リュカ数列の特徴がペル数列やペル・リュカ数列とも異なる傾向があることが鮮明に見えてくる。



と例示できる美しい公式<sup>[36]</sup>であることを補足する. 図11では同時に, フィボナッチ数列の等角螺旋図をルート5倍した等角螺旋図がリュカ数列との対応として明示できた. この考え方をヤコブスタール数列の等角螺旋図にも適用すると, ヤコブスタール・リュカ数列に対応した3倍の等角螺旋図として図示できた<sup>[40]</sup>. このときの3倍が後の章で言及するトリプル型正三角形螺旋図の特徴にも活かして来ることを先に述べて強調しておきたい.

## 6.2. ケプラー三角形と直角二等辺三角形の相性の例図

ここまでフィボナッチ数列とヤコブスタール数列について同じ基準による例図を見てきたが, 前節の等角螺旋図で用いた二組の直角三角形に注目したい. 一つは黄金比に対応するケプラー三角形<sup>[38,39]</sup>, もう一つは副第2貴金属比に対応する二等辺直角三角形である. この二組の直角三角形を用いて図11では等角螺旋の作図を試みたので, 描く倍率を慎重に扱いながら等角螺旋図の大小関係を見ていただきたい. すなわち, 図12の左上のように両者の等角螺旋を重ねてみるとその大小関係がイメージできる. このときの二組の等角螺旋図があたかも仲の良い生命体のように生き生きしているように感じ取れたので, 様々な例図を創造しながら図示を試みた. まるで仲

の良いご夫婦のように例図に収まったので, 聖書の聖句「二人は一体となる」の英語訳を活用して, 図の題目として「They will be one flesh.」を図の題目として付記している. また, 図12の右上のように, 標準正規分布にケプラー三角形を例示したところ, ケプラー三角形と黄金比の関係を例示するのにとっても都合が良かったので, しばらくこの例図を活用しながら研究を進めてきた<sup>[36,37]</sup>. このケプラー三角形の特徴については, 詳しくは文献<sup>[38,39]</sup>をご覧ください. また, 右下のようにケプラー三角形を代数螺旋として, 直角三角形を対数螺旋(等角螺旋)の基準として例示し, 同じ辺の長さを用いた正方形に合わせて図示したところ, とても良い相性が得られた<sup>[34-36]</sup>. 特に, それぞれ2枚の直角三角形を並べながら直角を形成して, 両者の螺旋図を描いたところ, 主要な点の通過や重なりがとても相性が良いことが確認でき, 魅力的な図の性質が明示できていることが分かった<sup>[34]</sup>.

## 7. ヤコブスタール数列によるダブル型正三角形螺旋

シングル, ダブル型正三角形螺旋図を考察してきたが, ダブル型正三角形螺旋図の考察で取り扱った数列は,  $k$ -ペル数列による正三角形螺旋図であった. 当初は, 図13の上部に示すように,  $k=2,3$  の場合の  $k$ -ヤコブスタール数列による螺旋図も描いて見たのだが, じっくり

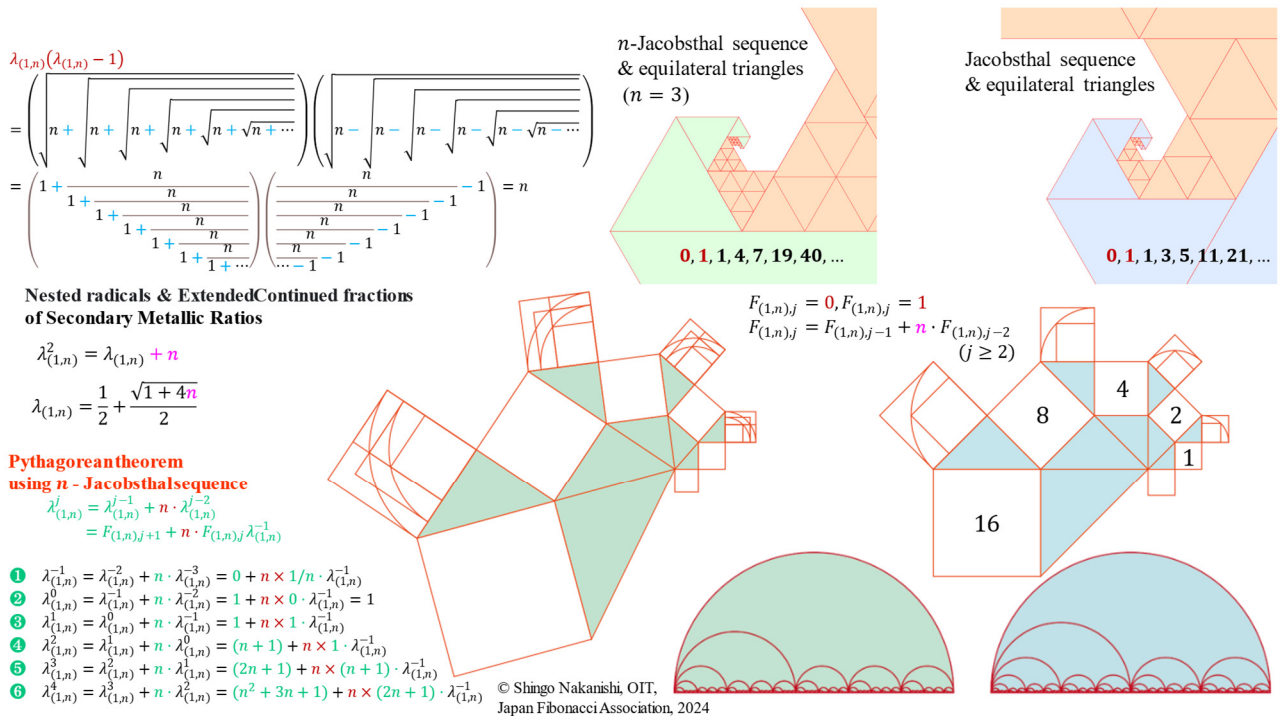


図13  $k$ -ヤコブスタール数列を用いた正三角形を連ねたダブル正三角形螺旋図を拡大( $k=2,3$ ) およびそのピタゴラスの定理による等角螺旋図との比較例図



らず、その空白が図足らずのトリプル正三角形螺旋図の作画に大変都合が良かったことを紹介する。

まず、図14をご覧ください。一番左側の正三角形螺旋図は、ヤコブスタール数列の初項を1、第2項を2に置き換えた数列

$$\begin{aligned} P_{(1,2),0}^{(1,2)} &= 1, P_{(1,2),1}^{(1,2)} = 2, \\ P_{(1,2),j}^{(1,2)} &= P_{(1,2),j-1}^{(1,2)} + 2 \cdot P_{(1,2),j-2}^{(1,2)} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (28)$$

を基準に描いた図である。したがって、図の空欄にもう一つ同じ水準の螺旋図が加わりトリプル螺旋図を描くことが可能である。一方で、中央のヤコブスタール数列を基準に描いたダブル螺旋図がいかかであろうか。確かに、左の螺旋図と同じ考え方でダブル螺旋図は描けている。しかしながら、空白の部分の意味が釈然としなない。力技で埋め込むことはできるのだが納得のいくルールが見つからない。同様に、右の螺旋図のようにヤコブスタール・リュカ数列でも描いてみた。ヤコブスタール数列と同様にダブル正三角形螺旋図を描ける。もちろん、シングル、ダブル螺旋図で成功例を考察したように、図余りを許すわけであることを付記しておく。ヤコブスタール数列によるダブル正三角形螺旋図の作画と同様に、ヤコブスタール・リュカ数列による螺旋図も空白を埋める有効なルールが見つからない。一方で、数列の特徴から、無理に埋め込むと、ヤコブスタール数列に特有の隣り合う数列が1つ余ってしまう特徴が図として浮き彫りになってくる。同様に、この考え方に基づくダブル正三角形螺旋図の作画を行うと、図13に例示するダブル型正三角形螺旋図として、 $k$ -ヤコブスタール数列による作画でもダブル型正三角形螺旋図を描けるのだが、やはり空白を埋める合理的な手立てが見つからない。

そこで、図14の上部のヤコブスタール数列によるダブル正三角形螺旋図から下部のトリプル正三角形螺旋図として図に示すように、発想を変えて螺旋図の拡大途中の図余りや図足らずは仕方がないと認めることにした。このときの図余りや図足らずを有効に活かしたトリプル螺旋図の性質に着目し、次章から図余りを認めたトリプル螺旋図の考察を進めてみたい。

## 8. 図余りを認めたヤコブスタール数列によるトリプル型正三角形螺旋図

ここで、図15を見ていただきたい。実は、前後するヤコブスタール数列をフィボナッチ数列のように足し合わせると和は、2のべき乗である。ということは、一つずらしたヤコブスタール数列を用いれば、二組の正三角形を一セットとするトリプル型正三角形螺旋図を描けることが分

かった<sup>[4]</sup>。ただし、図余りの規則性を認めて作図をすることによる例図であることを言及しておく。

この一つずらす性質は2023年度図学会大会で発表した修正パスカル三角形による例図<sup>[7]</sup>でも確認することができるので、図15の下側にこの特徴が分かりやすいように並べた修正パスカル三角形の例図もご覧ください。

このように、完璧なトリプル型の正三角形螺旋図と同様に描くことが可能であり、ヤコブスタール数列の初項と第2項を修正した新たな数列の活用やヤコブスタール数列を一つずらす操作によるトリプル型正三角形螺旋図の活用により、同様に図余りの規則性をデザインとして応用しながらトリプル型正三角形螺旋図の作画を楽しむことが期待できる。

その一例として、図15の考え方と同様に描いてみた図16のヤコブスタール・リュカ数列の活用によるトリプル螺旋図をご覧ください。ここで、一つの重要な特徴が分かった。数列を一つずらして和を形成するとき、その和は2のべき乗の3倍であった。この特徴は、図11でヤコブスタール数列による等角螺旋図の作画の3倍は、ヤコブスタール・リュカ数列による等角螺旋図に等しいことを記したときに既に説明を終えた特徴である。

このように、図11の作図で見つけた同じ基準でトリプル正三角形螺旋図を描く設計図が見つかった。ただし、空白の規則性は異なるため、ヤコブスタール数列によるトリプル正三角形螺旋図とまったく同じ正三角形螺旋図の3倍したというわけではないこともわかり、むしろ空白の多様性を楽しむことができるので、デザインの思考の幅が広がると期待したい。

また、図17のように初項を1とし、二項を2とするときにも、2の倍数を基準とする数列を構成できて、ヤコブスタール数列の形式は役立つことが改めて理解できる。

以上が、トリプル正三角形螺旋図とヤコブスタール数列の関係の考察である。ここで、数列や関連する比とシングル、ダブル、トリプル型の正三角形の螺旋図はただの偶然であったのだろうか再考してみたい。本稿の前半でも紹介したように、ワン・スキップ型の数列に再度注目するとその謎が腑に落ちるはずである。まず、図18を見ていただきたい。2023年度図学会大会で発表したスキップ型数列と修正パスカルの三角形の考え方が生きてくる。このように、ヤコブスタール数列をワン・スキップ型で見ると、ゼロ・スキップ型の和の重みである1:2が、3:2に読み替えられる。このことは大変重要な意味を有している。もう一度、図18をご覧ください。プラス



るが、ヤコブスタール数列は重要な役割を果たしたことが理解できる。

以上を言及したが、図18を基にシングルからトリプル

までの正三角形螺旋図を体系的に述べる論文は、2021年のFathauerの論文<sup>[7]</sup>まで見つからないにも関わらず、多くのデザイナーによるブログにトリプル型正三角形

1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

**Fibonacci sequence**  
 $p_{(1,1),0}^{(0,1)} = 0, p_{(1,1),1}^{(0,1)} = 1,$   
 $p_{(1,1),j}^{(0,1)} = 1 \cdot p_{(1,1),j-1}^{(0,1)} + 1 \cdot p_{(1,1),j-2}^{(0,1)} \quad (j \geq 2)$

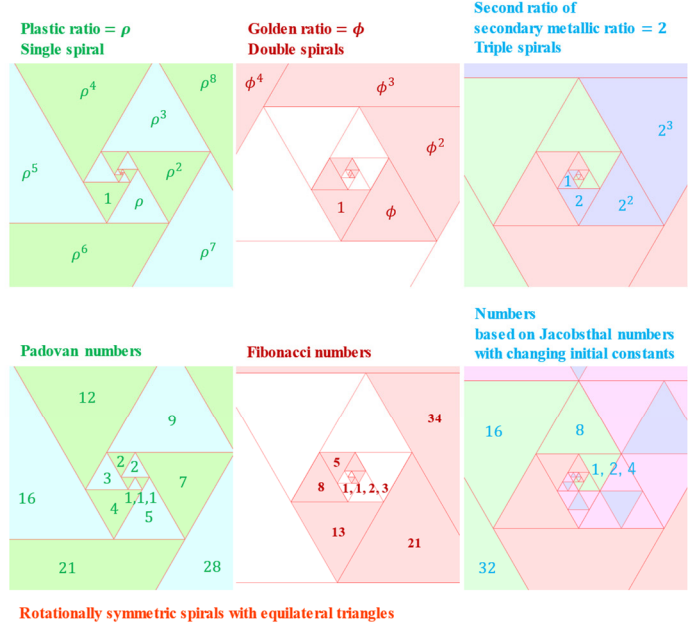
**Jacobsthal sequence**  
 $p_{(1,2),0}^{(0,1)} = 0, p_{(1,2),1}^{(0,1)} = 1,$   
 $p_{(1,2),j}^{(0,1)} = 1 \cdot p_{(1,2),j-1}^{(0,1)} + 2 \cdot p_{(1,2),j-2}^{(0,1)} \quad (j \geq 2)$

**Padovan sequence for single spiral using equilateral triangles**  
 $p_{(1,1,1),0}^{(1,1,1)} = 1, p_{(1,1,1),1}^{(1,1,1)} = 1, p_{(1,1,1),2}^{(1,1,1)} = 1,$   
 $p_{(1,1,1),j}^{(1,1,1)} = 1 \cdot p_{(1,1,1),j-2}^{(1,1,1)} + 1 \cdot p_{(1,1,1),j-3}^{(1,1,1)} \quad (j \geq 3)$   
 or  
 $\rho_{(1,1)} = \text{Plastic ratio} = \rho, \therefore \rho_{(1,1)}^3 = \rho_{(1,1)} + 1$

**1 skipped Fibonacci sequence for double spirals using equilateral triangles**  
 $p_{(2,1,2),0}^{(1,1,2)} = 1, p_{(2,1,2),1}^{(1,1,2)} = 1, p_{(2,1,2),2}^{(1,1,2)} = 2,$   
 $p_{(2,1,2),j}^{(1,1,2)} = 2 \cdot p_{(2,1,2),j-2}^{(1,1,2)} + 1 \cdot p_{(2,1,2),j-3}^{(1,1,2)} \quad (j \geq 3)$   
 or  
 $\rho_{(2,1)} = \text{Golden ratio} = \phi = \lambda_{(1,1)},$   
 $\therefore \rho_{(2,1)}^3 = 2 \cdot \rho_{(2,1)} + 1$  and  $\lambda_{(2,1)}^2 = \lambda_{(1,1)} + 1$

**Sequence based on 1 skipped Jacobsthal sequence for triple spirals using equilateral triangles**  
 $p_{(3,2,4),0}^{(1,2,4)} = 1, p_{(3,2,4),1}^{(1,2,4)} = 2, p_{(3,2,4),2}^{(1,2,4)} = 4,$   
 $p_{(3,2,4),j}^{(1,2,4)} = 3 \cdot p_{(3,2,4),j-2}^{(1,2,4)} + 2 \cdot p_{(3,2,4),j-3}^{(1,2,4)} \quad (j \geq 3)$   
 or  
 $\rho_{(3,2)} = \text{Second ratio of secondary metallic ratio} = 2 = \lambda_{(1,2)}, \therefore \rho_{(3,2)}^3 = 3 \cdot \rho_{(3,2)} + 2$  and  $\lambda_{(1,2)}^2 = \lambda_{(1,2)} + 2$

**Single, double, and triple equilateral triangle spirals and these one skipped sequences**



Ref. Annual meeting of Japan Fibonacci association, 2024

図18 正三角形を用いたシングル型，ダブル型，トリプル型螺旋図と関連するワン・スキップ型数列およびプラスチック比，黄金比，副第2貴金属比による同様の傾向の例示<sup>[23]</sup>

**Plastic ratio =  $\rho$  Single spiral**

**Golden ratio =  $\phi$  Double spirals**

**2 Triple spirals**

There will be no relation between upper equilateral triangle spirals and lower significant digits of Pascal's triangle mathematically. However, these might be a common sense to create something beautifully important.

1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	2	1	0	0
2	3	3	1	0
4	5	6	4	1

**Padovan sequence & Plastic ratio**  
 $\rho = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p_{(1,1),j+1}^{(1,1,1)}}{p_{(1,1),j}^{(1,1,1)}} = 1.3247 \dots$

1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	2	1	0	0
1	3	3	1	0
1	4	6	4	1

**Fibonacci sequence & Golden ratio**  
 $\phi = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F_{(1,1),j+1}}{F_{(1,1),j}} = 1.618 \dots$

1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
4	2	1	0	0
8	4	3	1	0
16	8	6	4	1

**Binomial Expansion & Power of 2**  
 $2 = \frac{2^{j+1}}{2^j}$

図19 正三角形を用いたシングル型，ダブル型，トリプル型螺旋図とパスカルの三角形に隠される数値の例示．美について果たしてこの関係は？<sup>[27]</sup>

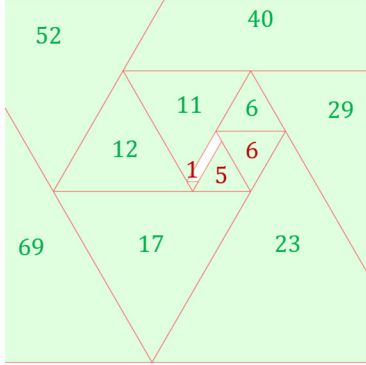


**1 skipped sequence**

$$P_{(1,1),0}^{(1,5,6)} = 1, P_{(1,1),1}^{(1,5,6)} = 5, P_{(1,1),2}^{(1,5,6)} = 6,$$

$$P_{(1,1),j}^{(1,5,6)} = 1 \cdot P_{(1,1),j-2}^{(1,5,6)} + 1 \cdot P_{(1,1),j-3}^{(1,5,6)} \quad (j \geq 3)$$

1,5,6,  
6,11,12,17,23,29,40,52,69,...



**0 skipped sequence**

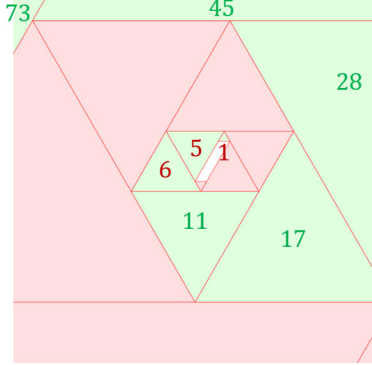
$$P_{(1,1),0}^{(1,5)} = 1, P_{(1,1),1}^{(1,5)} = 5,$$

$$P_{(1,1),j}^{(1,5)} = 1 \cdot P_{(1,1),j-1}^{(1,5)} + 1 \cdot P_{(1,1),j-2}^{(1,5)} \quad (j \geq 2)$$

$$P_{(2,1),0}^{(1,5,6)} = 1, P_{(2,1),1}^{(1,5,6)} = 5, P_{(2,1),2}^{(1,5,6)} = 6,$$

$$P_{(2,1),j}^{(1,5,6)} = 2 \cdot P_{(2,1),j-2}^{(1,5,6)} + 1 \cdot P_{(2,1),j-3}^{(1,5,6)} \quad (j \geq 3)$$

1,5,6,  
11, 17, 28, 45, 73, ...



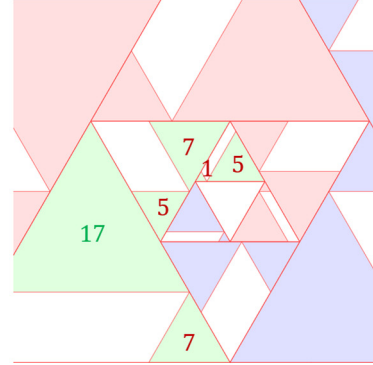
$$P_{(1,2),0}^{(1,5)} = 1, P_{(1,2),1}^{(1,5)} = 5,$$

$$P_{(1,2),j}^{(1,5)} = 1 \cdot P_{(1,2),j-1}^{(1,5)} + 2 \cdot P_{(1,2),j-2}^{(1,5)} \quad (j \geq 2)$$

$$P_{(3,2),0}^{(1,5,6)} = 1, P_{(3,2),1}^{(1,5,6)} = 5, P_{(3,2),2}^{(1,5,6)} = 7,$$

$$P_{(3,2),j}^{(1,5,6)} = 3 \cdot P_{(3,2),j-2}^{(1,5,6)} + 2 \cdot P_{(3,2),j-3}^{(1,5,6)} \quad (j \geq 3)$$

1,5,7,  
17,31,65,...



© Shingo Nakanishi, OIT, Japan Fibonacci Association, 2024

図20 Gibonacci数列や関連数列による正三角形を用いたシングル，ダブル，トリプル型螺旋図のその他一例

33 = 8 + 25

Unforgettable memories 🍊 and thank you for informing us of 1 : 8/25=1 : 0.32.

Spirals of combination using Jacobsthal sequence

$$0 + 1 = 1 : 1 + 1 = 2$$

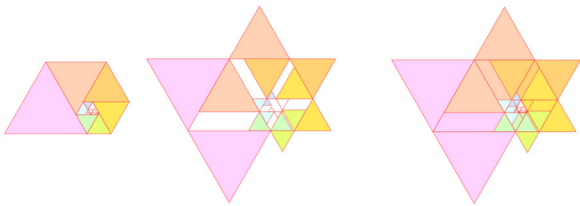
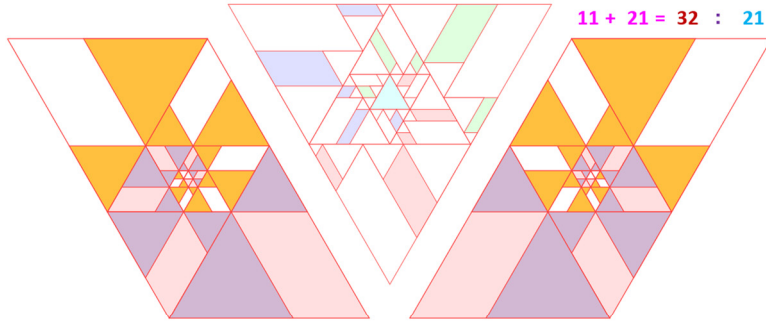
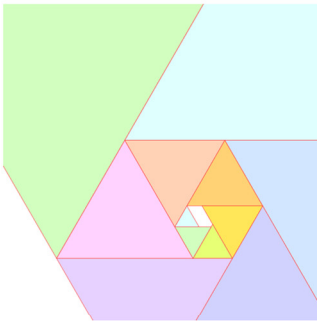
$$1 + 1 = 2 : 1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 = 4 : 3 + 5 = 8$$

$$3 + 5 = 8 : 5 + 11 = 16$$

$$5 + 11 = 16 : 11 + 21 = 32$$

$$11 + 21 = 32 : 21 + 43 = 64$$



Spirals of combination using Fibonacci sequence

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 5 = 8$$

$$5 + 8 = 13$$

Love, Joy, and Peace



© Shingo Nakanishi, OIT, Japan Fibonacci Association, 2024

図21 ヤコブスタール数列の図足らず着想を応用した正三角形を用いた螺旋図のその他一例

螺旋が散見できるということは芸術の世界では源流は定かではないがお馴染みなのかもしれない。このため、シングル，ダブルの正三角形螺旋図と同様に数列とその関連する比で考察を行うことが本稿の狙いであった。トリプル正三角形螺旋図を描く拡大の比は、数値が2である。

したがって、セカンダリーの第2貴金属比と一致するので、ヤコブスタール数列の初項からの設定値を図18のように修正した2のべき乗を示す数列を活用したら旨く作画が可能となった。この数列もまたパスカルの三角形を修正すれば成り立つことを2023年図学会大会で公表<sup>[27]</sup>

しているの図17に併記してみた。このときのワン・スキップ型数列に焦点を当ててみると、これまで考察してきたダブル正三角形螺旋も併せて興味深い傾向が分かる。すなわち、数学的な性質こそ異なるが、ワン・スキップして重み付した数値の和からなる数列の発想は、今回考察した螺旋図の作画のための基本概念図といえるかもしれない。

このことが分かりやすいように、図18にシングル、ダブル、トリプル型の3組の螺旋図に3つの初期設定値を考慮したワン・スキップ型数列の数値を明示し、それぞれが比較しやすいように並べて表記してみた。これらの数列の数値を基にシングル、ダブル、トリプルの正三角形の関係が図示されている。同時に、同じ傾向を基準とする比でも比較できるように併記してそれぞれ図示してみた。すなわち、シングル正三角形螺旋図はプラスチック比による螺旋図として図示し、ダブル正三角形螺旋図は黄金比による螺旋図としている。同様に、トリプル正三角形螺旋図はセカンダリーの第2貴金属比による螺旋図として作画でき、基準とする比に関連する数列による螺旋図とも相性が良いことが分かった。

ところで、本稿の骨格に関係ない蛇足として、もう一例を取り上げたい。ここまで議論したプラスチック比や黄金比と数値は、この予稿集を読んで頂いた読者には、実はお馴染みの数値であった。そうである。気が付いた読者は、この方面のことを常に考えている方々であると推察する。でもない方には、普通の一般的な事象の一つに過ぎないのかもしれない。勿体ぶらずに打ち明けると、図15、図16、図17で示す修正パスカル三角形をご覧いただきたい。このように考えると、ここまで考察した比は、図19に記すオリジナルのパスカル三角形の桂馬型の和、対角上の和、横の和の前後の比の数値と一致するのである。まったくの偶然であるが、案外身近なところにアイデアとなる重要なヒントは暗号のごとく隠されているのかもしれない。

加えて、読者に本稿の本質が再確認できるようにもう一例を取り上げたい。本稿の題目のように図余りと図足らずを許せば、初項からの定数を任意に設定したGibonacci数列や関連数列による正三角形螺旋図は、図20のように描けることを具体的に例示しておきたい。このようになりに柔軟に描けることが分かったことが本稿の特徴である。

以上、清々しい気持ちに浸らせてくれた一瞬に感動、感謝しながら著者自身はデザインの素人であるが、本稿に基づくデザインの一例として図21を例示して筆をお

きたい。読者の皆様が本稿の内容をどのように理解され、もしくは感じ取られて、これらの数列と正三角形螺旋の関係を手く併せた芸術的な魅力を発展させてくれることを期待したい。

## 9. 結論

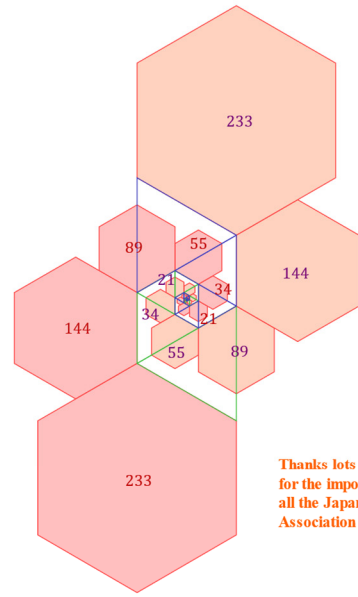
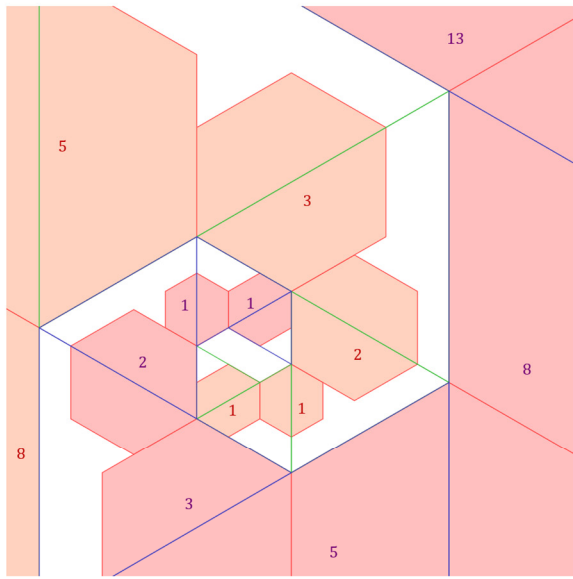
本研究では、シングル、ダブル、トリプル型の正三角形螺旋図について、関連する数列と比を基準に作画できる方法の提案や紹介を行なった。このときに、図余り、もしくは図足らずの可能性も考慮した螺旋図の工夫やその性質を明らかにし、ダブル型螺旋図ではプライマリーの貴金属比に関連する数列の足し合わす重み付けによる作画の特徴についても提案を行った。トリプル型ではヤコブスタール数列を基準に設定値を修正した2のべき乗を表わす数列を紹介し、以上の特徴を考察した螺旋図を併記して可視化を試みた。以上、これらの正三角形を用いた螺旋図に図余りもしくは図足らずという発想と、パスカルの三角形を例示した数列の魅力を正三角形螺旋図と併記しながら提案を試みた。

### 補足：質疑と回答の追記

発表当日に好意的にいくつかの質問を賜った。そのうちのの一つを持ち帰り取り組んだところ明確になったので、補足として追記する。その質問は以下のとおりである。

積極的に図余りや図足らずを想定するときには、Gibonacci数列を用いた場合でも正六角形を用いた螺旋図は作図が可能であるかという質問であった。宿題として持ち帰ることを約束し、東京からの帰宅後に着手したところ、図22のようにフィボナッチ数列によるダブル正六角形型螺旋図として作図が可能であることが分かった。そして、質問者の意図通りに確かに図余りや図足らずが数列を用いた六角形の各所で認められることも図の傾向から得られるが規律正しく螺旋軌道を描けている。加えて、ダブル型の螺旋図として作画できることが、本研究の核心でもある正三角形の活用による螺旋図の補助線によって保証されていることも併せて理解できる。したがって、正六角形を用いた螺旋図も、想定外であったが会場からの質問により、講演集の中に得ることができた。

そこで、ペル数列に関しても図23に示すように正六角形を活用したダブル螺旋図の作画を試みた。基本的な性質は正三角形の時と同じように、フィボナッチ数列の拡張の考え方に習うようであるが、隙間が大きすぎるように感じられる。そこで、同時に図23に併記したトリプル



Thanks lots  
for the important advice by  
all the Japan Fibonacci  
Association members.

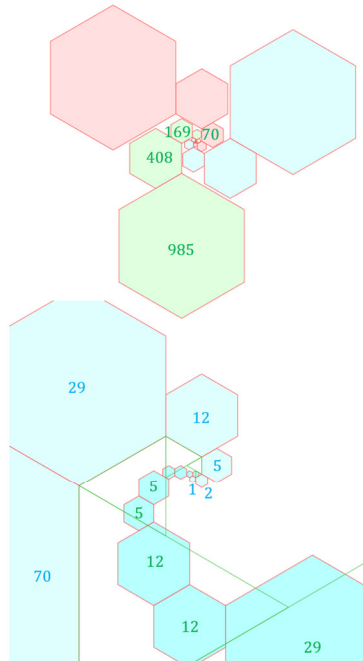
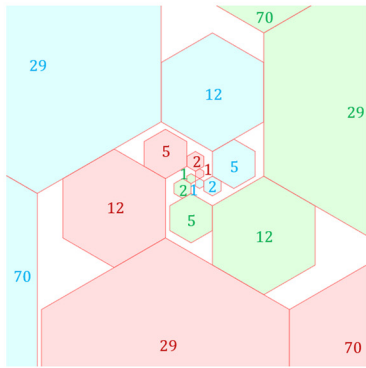
**Fibonacci sequence**  
 $F_{(1,1),0} = 0, \quad F_{(1,1),1} = 1,$   
 $F_{(1,1),j} = F_{(1,1),j-1} + F_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2)$

**Fibonacci numbers**  
**0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...**

**Double spirals using regular hexagons  
based on Fibonacci sequence**

©Shingo Nakanishi, OIT, Japan, 2024, Japan Fibonacci association.

図22 図余りや図足らずを積極的に応用した正六角形を用いたダブル型フィボナッチ螺旋図の作画例

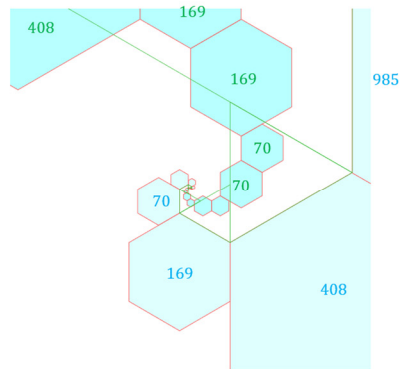


**Double & triple spirals based on Pell sequence  
using regular hexagons**

**Pell sequence**  
 $F_{(2,1),0} = 0, \quad F_{(2,1),1} = 1,$   
 $F_{(2,1),j} = 2 \cdot F_{(2,1),j-1} + F_{(2,1),j-2} \quad (j \geq 2)$

**Pell numbers**  
**0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, ...**

Thanks lots  
for the important advice by  
all the Japan Fibonacci  
Association members.



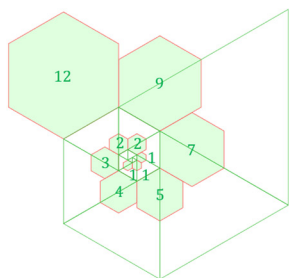
©Shingo Nakanishi, OIT, Japan, 2024, Japan Fibonacci association.

図23 図余りや図足らずを積極的に応用した正六角形を用いたダブル型とトリプル型ペル螺旋図の作画例

螺旋図も考えてみた。2のべき乗では、正六角形によるトリプル型螺旋図の作画が上手いかず、ヤコブスタール数列の活用は断念したが、その代わりにもっと拡大率が大きいペル数列を祈る気持ちで採用したところ、図23に示す通りに見事に描けた。一旦、隙間を作るように膨ら

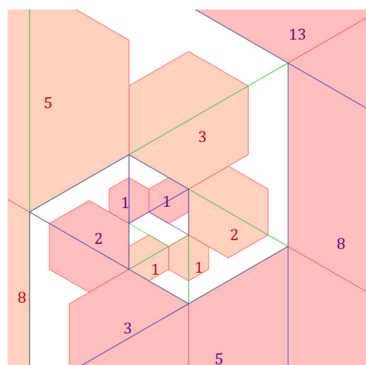
んだ後、綺麗に収まるので、そのまま図が重なるかと思えばわずかな隙間を得ながらもトリプル螺旋図を意識する拡大を描けていることが理解できる。

したがって、パドヴァン数列を用いた正六角形によるシングル螺旋図として加えて、本研究のこれらの副産物



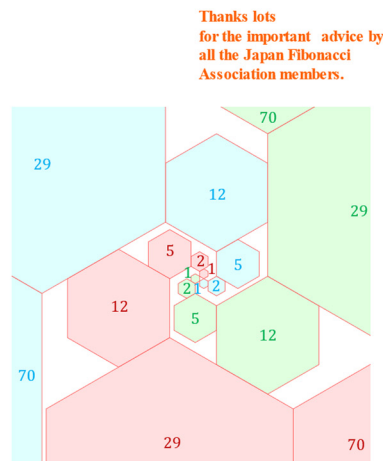
Single spiral based on Padovan sequence using regular hexagons

**Padovan sequence**  
 $P_{(1,1),0} = 0, P_{(1,1),1} = 1, P_{(1,1),2} = 1,$   
 $P_{(1,1),j} = P_{(1,1),j-2} + P_{(1,1),j-3} \quad (j \geq 3)$



Double spirals based on Fibonacci sequence using regular hexagons

**Fibonacci sequence**  
 $F_{(1,1),0} = 0, F_{(1,1),1} = 1,$   
 $F_{(1,1),j} = F_{(1,1),j-1} + F_{(1,1),j-2} \quad (j \geq 2)$



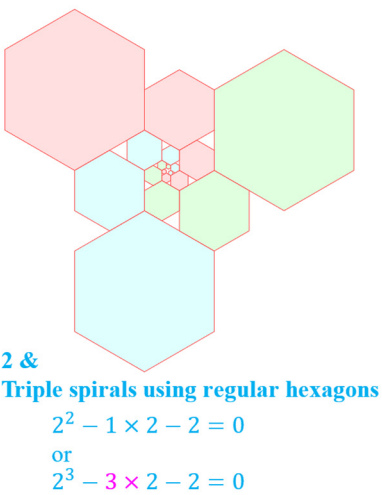
Triple spirals based on Pell sequence using regular hexagons

**Pell sequence**  
 $P_{(2,1),0} = 0, P_{(2,1),1} = 1,$   
 $P_{(2,1),j} = 2 \cdot P_{(2,1),j-1} + P_{(2,1),j-2} \quad (j \geq 2)$

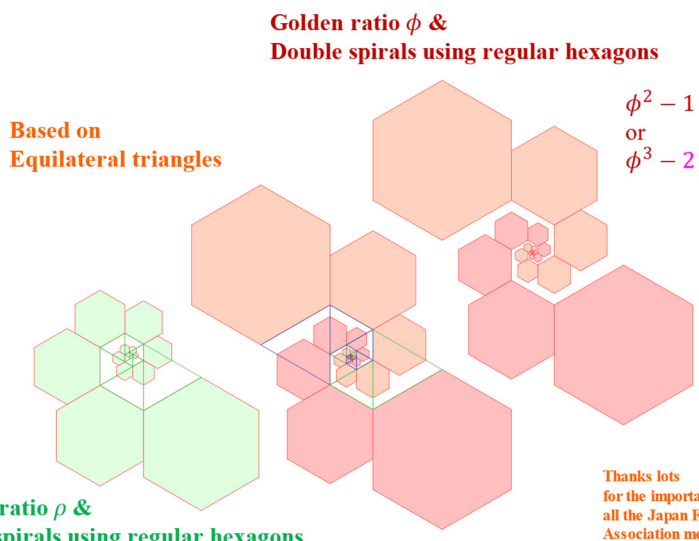
Thanks lots for the important advice by all the Japan Fibonacci Association members.

©Shingo Nakanishi, OIT, Japan, 2024, Japan Fibonacci association.

図24 図余りや図足らずを積極的に応用した正六角形を用いたシングル，ダブル，トリプル型螺旋図の作画例 (パドヴァン数列，フィボナッチ数列，ペル数列を活用した作画例)



2 & Triple spirals using regular hexagons  
 $2^2 - 1 \times 2 - 2 = 0$   
or  
 $2^3 - 3 \times 2 - 2 = 0$



Plastic ratio  $\rho$  & Single spirals using regular hexagons  
 $\rho^3 - 1 \times \rho - 1 = 0$

Golden ratio  $\phi$  & Double spirals using regular hexagons  
 $\phi^2 - 1 \times \phi - 1 = 0$   
or  
 $\phi^3 - 2 \times \phi - 1 = 0$

Thanks lots for the important advice by all the Japan Fibonacci Association members.

©Shingo Nakanishi, OIT, Japan, 2024, Japan Fibonacci association.

図25 図余りや図足らずを積極的に応用した正六角形を用いたシングル，ダブル，トリプル型螺旋図の作画例 (プラスチック比，黄金比，2を基準に作画例)

を記念に図24のとおり，シングル型，ダブル型，トリプル型の正六角形を用いた螺旋図を並べた図を追記の図として残しておきたい。  
ところで，追記公表の翌日に，黄金比でも描けるか挑

戦したところ，図25に示す通り，見事に補助線の正三角形とも相性が良くダブル正六角形螺旋図の作画ができた。そこで，もう一度，慎重に2のべき乗によるトリプル正六角形螺旋図にも再挑戦したところ，中心付近の六角形の

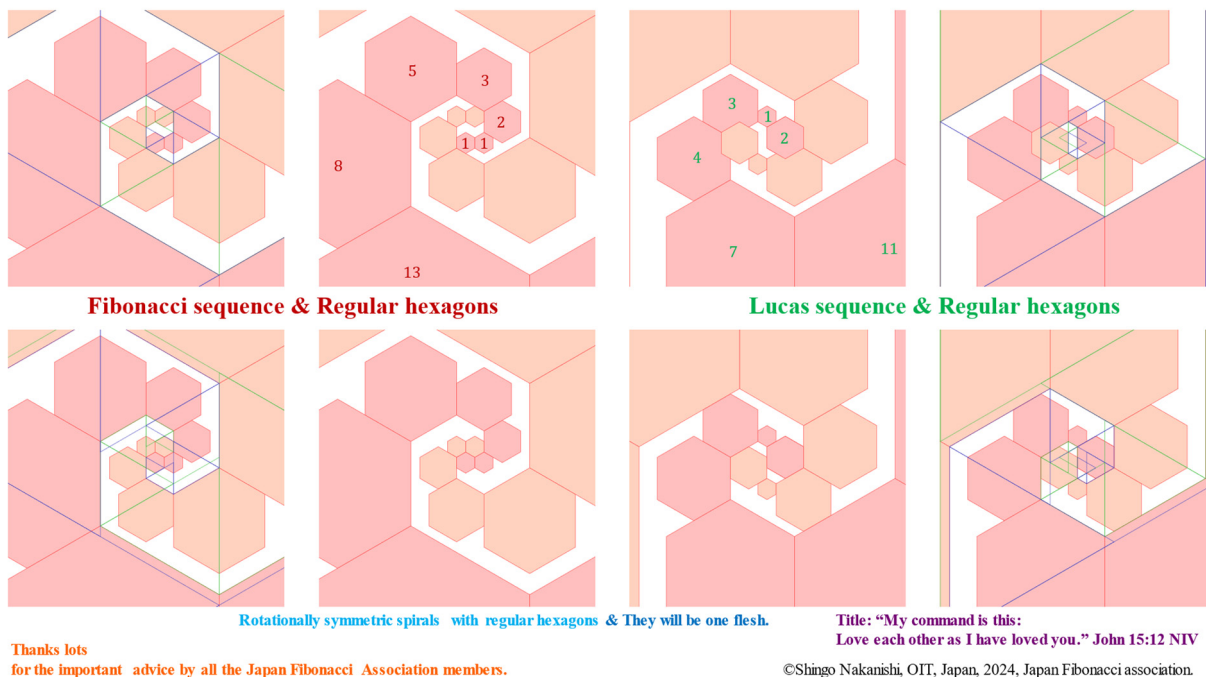


図26 図余りや図足らずを積極的に応用した正六角形を用いたダブル型螺旋図の作画例  
(フィボナッチ数列とリュカ数列による正六角形を用いたダブル型螺旋図)

配置の修正で上手く収まることができた。思わずこれらの研究成果に驚きを隠せなかったが、同時に検証不足であったことが分かった。

ところで、正六角形のダブル型螺旋図を作画するうちに興味深いことが分かった。読者の皆様もここまで読んでこられたので、リュカ数列のダブル型螺旋図の傾向を想像されたと思われる。リュカ数列を活用した正六角形によるダブル型螺旋図を作成して図26に示す特徴が分かった。すなわち、正三角形の傾向を活用しながら数学的に取り扱うならば、フィボナッチ数列もリュカ数列も図26の上側のダブル型螺旋図として美しく描けるし、リュカ数列には図余りが確認できる。一方で、片方の螺旋図を少し移動させて芸術的に観察すならば、図26の下側のように描写したほうがより美的である。素直に、聖書の句「二人は一体となる(They will be one flesh.)」を感じる瞬間でもあるし、「互いに愛し合いなさい(Love each other as I have loved you.)」のように隣人を愛する心を感じることもできるので、締めくくりに図としてさらに追加してみた。

先行研究の調査をこれから行いながら、これらの特徴を見極めていくことにし、本研究では、追記の加筆訂正と図余りや図足らずを積極的に活用するときの正六角形螺旋図の速報版と位置付けて長くなったが解説を終えた

い。

以上の追記を代表の片山真一先生と座長の大関清太先生に確認を得たので追記したことを公表する。天の神様に感謝しながら実りある大変有益な発表会であったことを覚えておきたい。

### 謝辞

ここまでの研究成果に、数列や貴金属比の魅力をご指導や励みになるお言葉を賜った岩本誠一先生、安田正實先生に心から御礼申し上げます。また、両先生とご縁をいただいた北條仁志先生に感謝申し上げます。

また、フィボナッチ数列や黄金比の関係を調べていく中で、理解を深める著書を残してくださった細矢治夫先生、中村滋先生、研究集会の当日に好意にご質問を賜った中川幸一先生をはじめ、フィボナッチ協会の研究集会会場の皆様ならびに先人の研究者に厚く感謝申し上げます。この他にもご支援いただいた多くの皆様にもこの場を借りて御礼申し上げます。

また、フィボナッチ協会研究集会への参加にご支援いただいた大関清太先生、片山真一先生にも厚く御礼申し上げます。

最後に、システムティックな考え方と統合する考え方と数理的な考え方をご指導いただいた小生の指導教授の

中易秀敏先生, 栗山仙之助先生, 大西匡光先生に御礼を申し上げます.

## 参考文献

- [1] “プラスチック数”, Wikipedia,  
<https://ja.wikipedia.org/wiki/プラスチック数>,  
(2024年2月5日アクセス).
- [2] “Plastic ratio”, Wikipedia,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Plastic\\_ratio](https://en.wikipedia.org/wiki/Plastic_ratio), (2024  
年2月5日アクセス).
- [3] “パドヴァン数列”, Wikipedia,  
[https://ja.wikipedia.org/wiki/パドヴァン数  
列](https://ja.wikipedia.org/wiki/パドヴァン数列), (2024年2月5日アクセス).
- [4] “Padovan sequence”, Wikipedia,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Padovan\\_sequence](https://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence),  
(2024年2月5日アクセス).
- [5] “ペラン数”, Wikipedia,  
<https://ja.wikipedia.org/wiki/ペラン数>, (2024年2月  
5日アクセス).
- [6] “Perrin number”, Wikipedia,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Perrin\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Perrin_number),  
(2024年2月5日アクセス).
- [7] Fathauer, R., "Logarithmic Spiral Tilings of  
Triangles", Bridges 2021 Conference Proceedings,  
Tessellations Publishing, (2021), 55-62.
- [8] Stewart, I., “Tales of a Neglected Number”,  
Scientific American, No. 6, June, (1996), 92-93.
- [9] 中西真悟, “細矢の三角形の拡張図ならびに黄金比  
やプラスチック比を参考とするいくつかの数列の  
修正版パスカルの三角形と螺旋図による可視化”,  
日本オペレーションズ・リサーチ学会2023年秋季  
研究発表会, (2023), 148-149.
- [10] 中西真悟, “図余りと図足らずを許した正三角形を  
連ねた螺旋図 -パドヴァン数列とペラン数列に習  
って-”, 日本図学会2023年度関西支部学術講演会,配  
布資料,1-6, (2024).
- [11] Klasßen, B., “Infinite perfekte  
Dreieckszerlegungen auch für gleichseitige  
Dreiecke”, Elemente Der Mathematik, 50, (1995),  
116-121 (in German).
- [12] Kazlacheva, Z., “Fibonacci Rose in Fashion  
Design”, ARTTE Applied Researches in Technics,  
Technologies and Education, vol. 2, no. 3, (2014),  
224-230.
- [13] Kazlacheva, Z., and Julieta I. J., "The golden and  
Fibonacci geometry in fashion and textile  
design", Proc. of the eRA 10, (2016), 15-64.
- [14] ErkDemon, “#3 - The "Fibonacci Rose”, YouTube,  
(2008), (2024年5月3日アクセス).
- [15] Sharp, John. "Spirals and the golden section."  
Nexus Network Journal 4 (2002): 59-82.
- [16] Mulatu Lemma, The Mulatu Numbers, Advances  
and Applications in Mathematical Sciences, Vol.  
10, Issue 4, (2011), 431-44.
- [17] Mulatu Lemma, Mustafa Mohammed and  
Jonathan Lambright, J., “Some Celebrity  
Theorems of the Mulatu Numbers”, IJRDO -  
Journal of Mathematics, Vol. 5, Issue 1, (2019), 1-  
5.
- [18] Arthur T. Benjamin, Jennifer J. Quinn, “Proofs  
that Really Count: The Art of Combinatorial  
Proof”, The Mathematical Association of America,  
(2003).
- [19] 中村滋, “フィボナッチ数の小宇宙 第2版: フィボ  
ナッチ数、リュカ数、黄金分割”, 日本評社, (2008).
- [20] Thomas Koshy, “Pell and Pell–Lucas Numbers  
with Applications”, Springer, (2014).
- [21] Panwar, A., Sisodiya, K. and Rathore, G.P.S.,  
“On the products of k-Pell number and k-Pell  
Lucas number”, IOSR Journal of Mathematics,  
13, 5-III, (2017), 85-87.
- [22] 岩本 誠一, 江口 将生, 吉良 知文, “黄金・白銀・  
青銅: 数と比と形と率と”, 九州大学経済学会, 経  
済学研究, Vol.74, No. 4, (2008), 1-19.
- [23] de Spinadel, V. W., "The family of metallic  
means", Vis. Math Vol. 1, No. 3, (1999) 1-16.
- [24] “Jacobsthal number”, Wikipedia,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobsthal\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobsthal_number),  
(2024年5月11日アクセス).
- [25] Thomas Koshy, “Fibonacci and Lucas Numbers  
with Applications, Volume 1”, 2nd Edition, Wiley,  
(2017)
- [26] Thomas Koshy, “Fibonacci and Lucas Numbers  
with Applications, Volume 2”, 2nd Edition, Wiley,  
(2018)
- [27] 中西真悟, “修正パスカルの三角形の活用を含む貴  
金属比と関連する数列の数理とその可視化”, 図学  
会2023年度大会学術講演論文集, (2023), 63-68.

- [28] Draǵal, A., Hämäläinen, C., "An enumeration of equilateral triangle dissections", *Discrete applied mathematics*, Vol. 158, No.14 (2010), 1479-1495.
- [29] 中西真悟, "黄金比とフィボナッチ数列とリュカ数列, 白銀比とペル数列とペル・リュカ数列を基準とする図形による幾何学的可視化", 日本オペレーションズ・リサーチ学会2023年秋季研究発表会, (2023), 142-143.
- [30] Alves, Francisco Regis Vieira, et al. "Teaching Recurrent Sequences in Brazil Using Historical Facts and Graphical Illustrations." *Acta Didactica Napocensia* 13.1 (2020): 87-104.
- [31] Parodi, Bernhard R. "A generalized Fibonacci spiral." *arXiv preprint arXiv:2004.08902* (2020) 1-22.
- [32] Dotera, T., Shinichi, B., Primož, Z., "Bronze-mean hexagonal quasicrystal." *Nature materials*, 16.10 (2017), 987-992.
- [33] 中西真悟, "ピタゴラスの定理と標準正規分布に基づく螺旋および等角図の幾何学的考察 — 三角形と正方形や貴金属比の類似比によるアプローチ—", *大阪工業大学紀要*, Vol. 55, No.2, (2021), 103-127.
- [34] 中西真悟, "標準正規分布の累積分布関数を傾きとする黄金比や貴金属比の類似比(その1) ケプラー三角形,ピタゴラスの定理,平方および代数螺旋の再考", 日本オペレーションズ・リサーチ学会2021年春季研究発表会, No. 2-E-10, (2021), 1-2.
- [35] 中西真悟, "標準正規分布の累積分布関数を傾きとする黄金比や貴金属比の類似比(その2) フィボナッチ数列の拡張とフラクタルを目指した等角螺旋デザイン", 日本オペレーションズ・リサーチ学会2021年春季研究発表会, No. 2-E-11, (2021), 1-2.
- [36] Nakanishi, S., "Visualizations of discrete equiangular spirals based on similar metallic ratios using Pythagorean theorem and weighted Fibonacci sequences", *Abstracts of 31th European Conference on Operational Research (the EURO2022)*, (2022), 21.
- [37] Nakanishi, S. "Visualizations of Sinusoidal Spirals, Limacons of Pascal, and Conic Curves using Equiangular Spirals of Secondary Metallic Ratios", *Proceedings of the 21st International Conference on Geometry and Graphics*, Kitakyushu, Japan, (2024).
- [38] Meisner, G. (赤尾秀子訳), 「黄金比 —秘められた数の不思議—」, 創元社, (2019).
- [39] Meisner, G., "The Golden Ratio: The Divine Beauty of Mathematics", *Race Point Publishing*, (2017).
- [40] 中西真悟, "一般化されたフィボナッチ数列およびリュカ数列の修正パスカルの三角形による幾何学的可視化", 日本オペレーションズ・リサーチ学会2023年秋季研究発表会, (2023).